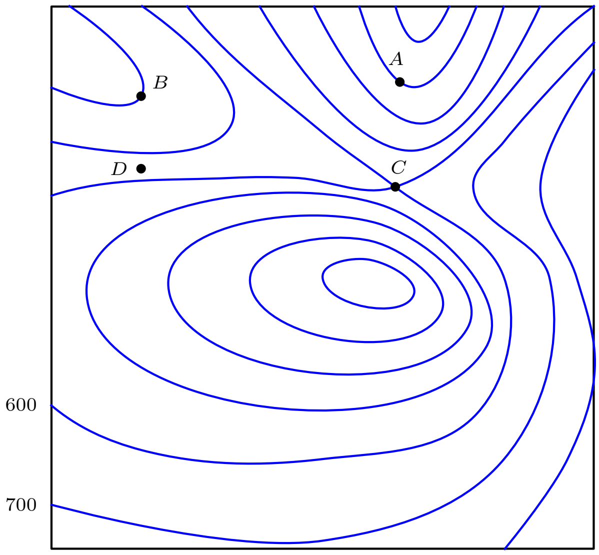
Exercice 42.

1. Tracer les lignes de niveau 0 et de niveau 4 de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto x^2 + y^2$.

2. Tracer les lignes de niveau 0 et de niveau 1 de la fonction $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto x^3 - y$.

Exercice 43.

L'altitude d'une région montagneuse est donnée par une fonction $z = f(x,y)$ (en mètres). Les lignes des niveaux multiples de 100 sont représentées sur la carte ci-dessous ; pour deux de ces lignes leurs niveaux sont indiqués.



On suppose que les points critiques de la fonction f sont non-dégénérés, c'est-à-dire que le déterminant hessien n'y s'annule pas.

1. Quelle est la nature du point C ? Que vaut le gradient de f en ce point ?

2. Donner les altitudes des points A, B, C et D.

3. Placer dans le graphique les vecteurs gradients de f aux points A et B.

4. Y a-t-il quelque part sur la carte une vallée ou une cime ?

Exercice 44.

On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto x + y^2$.

1. Dessiner les lignes de niveau de f.

2. Dessiner la surface définie par l'équation $z = f(x,y)$.

3. Calculer les vecteurs gradients de f aux points $(1,1)$, $(1,0)$ et $(0,-1)$, puis placez-les sur le dessin des lignes de niveau. Que constatez-vous ?

Exercice 45.

On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto x^2 + 4y^2$. Pour tout $z \in \mathbb{R}$ on note $\mathcal{C}_z$ la ligne de niveau z par f.

1. Esquisser les lignes des niveaux $\mathcal{C}_4$, $\mathcal{C}_{16}$ et $\mathcal{C}_8$ dans un repère orthonormé.

2. Donner l'équation de la tangente à la courbe d'équation $x^2 + 4y^2 - 8 = 0$ au point de contact $(2,1)$.

3. Donner l'équation du plan tangent à la surface d'équation $x^2 + 4y^2 - z = 0$ au point de contact $(2,1,8)$.

Exercice 46.

Calculer les dérivées partielles premières et secondes des fonctions suivantes :

$$u(x,y) = \frac{x}{y}, \qquad f(x,y) = x^y,$$
$$g(x,y) = e^{2x}y^2 + 2y, \qquad h(x,y) = \ell n(x)(x^2 y - y).$$

Exercice 47.

Saviez-vous qu'on peut visualiser le graphe d'une fonction en tapant son équation dans le champ de recherche Google ? Testez `y=x^2-3*x` puis `z=3*x^2+y^2`. (Mais ça ne fonctionne pas sur les smartphones.)
Pour chacune des quatre équations suivantes

$$z = \pm x^2 \pm y^2$$

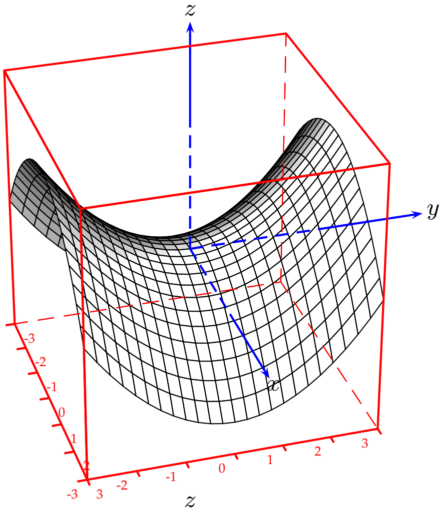
prédire l'allure de la surface que vous allez obtenir, puis la vérifier par Google. Dans chaque cas montrer que l'origine est le seul point critique et calculer le déterminant hessien.

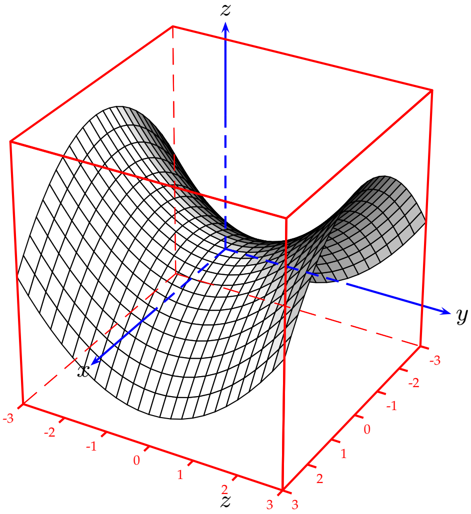
Exercice 48.

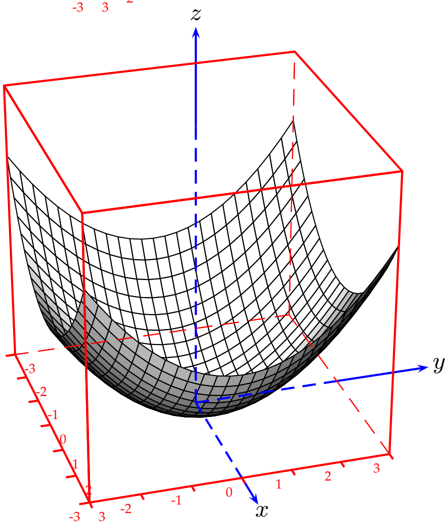
On considère les cinq fonctions définies sur le carré $[-3,3]^2$ par

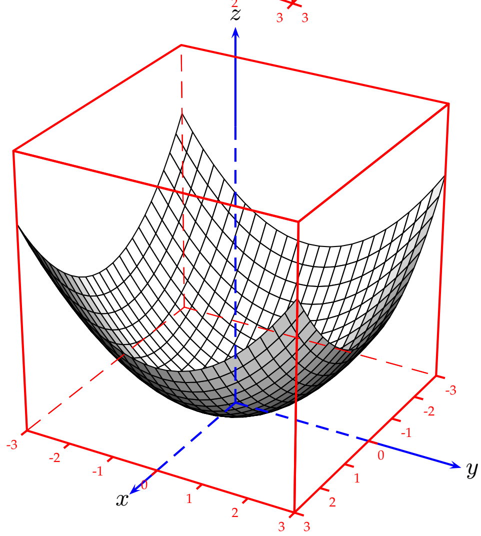
$$f(x,y)=x^2+y^2, \qquad g(x,y)=-x^2+y^2, \qquad h(x,y)=y^3-9y, \qquad k(x,y)=y^3, \qquad \ell(x,y)=x^2+y^3-9y\,.$$

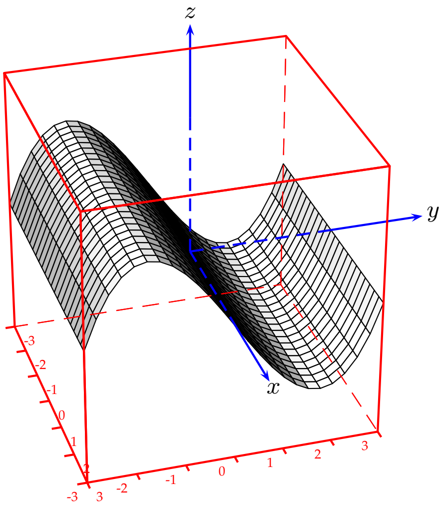
1. On note $\mathscr{C}_f$ la surface d'équation $z=f(x,y)$; de manière similaire on note les surfaces des autres fonctions. Ci-dessous chacune est représentée deux fois (avec des points de vue différents). Quelle surface correspond à quelle fonction ?

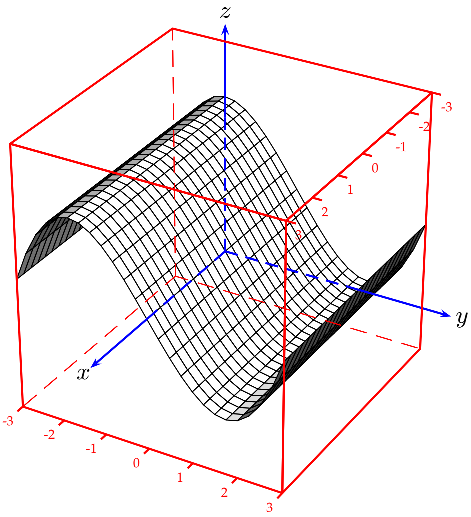


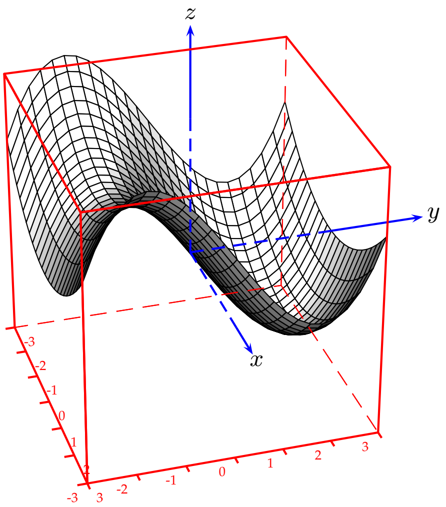


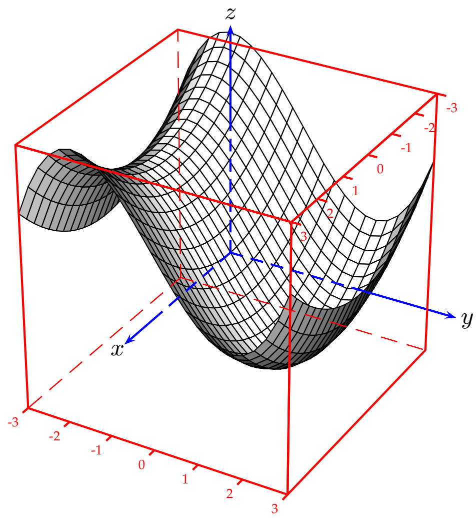


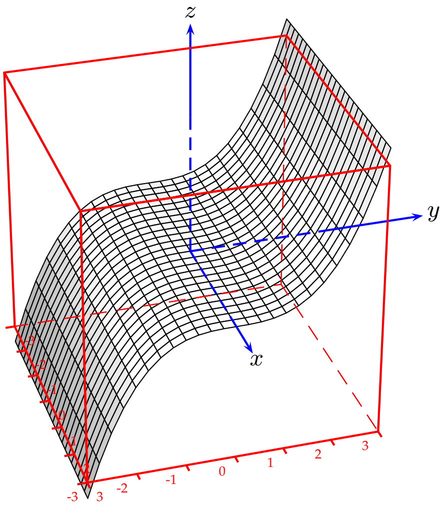


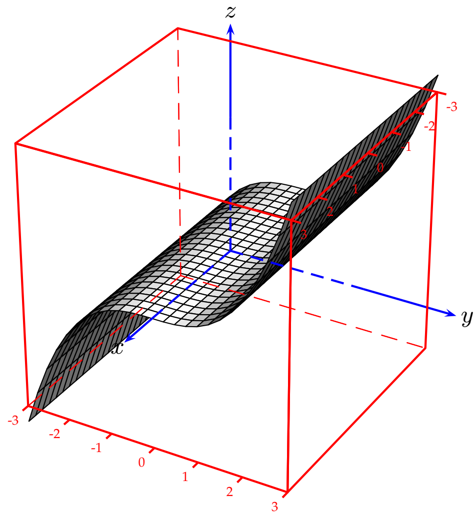






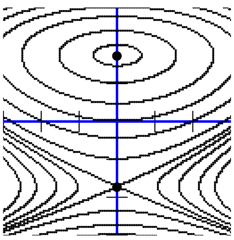


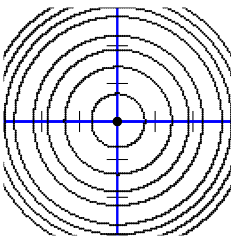


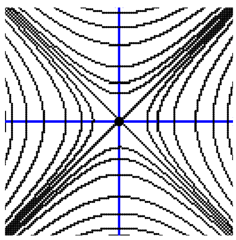


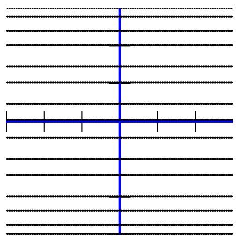
2. Pour chaque fonction déterminer, par le calcul, les points critiques ainsi que le signe du hessien en ces points critiques ; vérifier la règle de convexité du cours.

3. On considère les graphiques des lignes de niveau de ces fonctions. Lequel peut correspondre à quelle fonction ?









Exercice 49.

Identifier la nature des points critiques de la fonction

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto x^2y - 9x^2 - 2y^2.$$

Exercice 50.

Identifier la nature des points critiques de la fonction

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \ (x, y) \mapsto 2x^2 - 8xy^2 - \frac{16}{3}y^3 + 8y^2 - 8.$$

Exercice 51.

Trouver l'ensemble de définition et identifier la nature des points critiques de la fonction

$$\psi : (x, y) \mapsto \frac{xe^{-x}}{y} + \frac{y}{e}.$$

Exercice 52.

Un fabriquant produit deux produits A et B. Les fonctions de demandes sont

$$x = 25 - \frac{p}{2}, \qquad y = 30 - q,$$

où x et y sont les quantités respectives de produits A et B vendus pour des prix respectifs de p et q. La fonction de coût est

$$c(x, y) = x^2 + 2xy + y^2 + 20.$$

Déterminer le profit maximal. Pour quels prix p et q est-il atteint ?

Exercice 53.

Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donnée par la formule

$$f(x, y) = \frac{y^3}{3} + y^2 + x^2 + 2xy - 2y + 2x - 5 .$$

1. Calculer le gradient de f.
2. Calculer la matrice Hessienne de f.
3. Trouver les points critiques de f.
4. Identifier la nature des points critiques trouvés à la question précédente.

Exercice 54.

1. Pour une fonction à deux variables $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto f(x, y)$, rappelez la formule du développement de Taylor à l'ordre 1 au point (a, b).
2. Soit la fonction donnée par $f(x, y) = x^3 - y^3$. Utilisez la question précédente pour donner une valeur approchée de $1.1^3 - 0.9^3$.

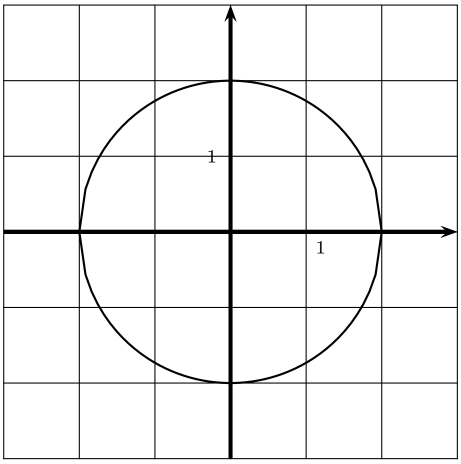
Exercice 55.

Soit $f : \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \sqrt{xy}$. A l'aide d'un développement de Taylor trouver une valeur approchée de $\sqrt{1.01 \times 3.98}$.

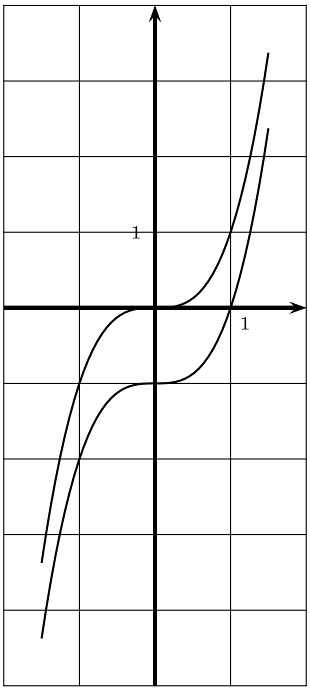
1. Solutions

Solution 42.

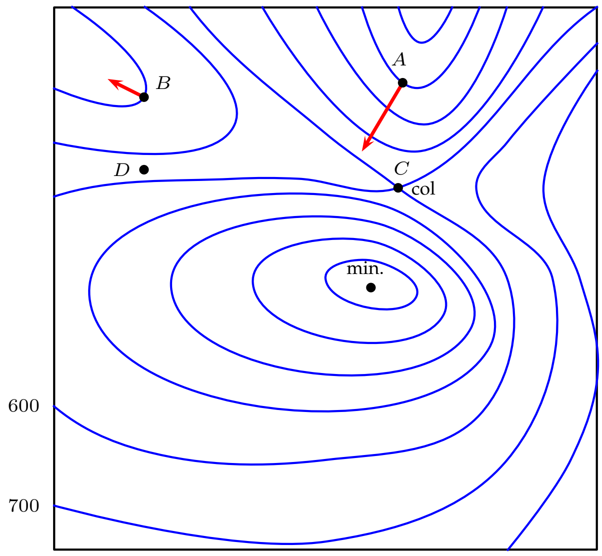
1. Les lignes de niveau 0 et 4 de f sont les courbes d'équation $x^2 + y^2 = 0$ et $x^2 + y^2 = 4$. La première est réduite au point de coordonnées $(0, 0)$ (l'origine), et la deuxième est le cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon 2 :



2. Les lignes de niveau 0 et 1 de g sont les courbes d'équation $x^3 - y = 0$ et $x^3 - y = 1$. C'est-à-dire que ce sont les courbes d'équation $y = x^3$ et $y = x^3 - 1$:



Solution 43.



1. Le point C est un col. C'est un point stationnaire, le gradient y est nul.

2. Les altitudes respectives des points A, B, C et D sont 300, 800, 600 et environ 650 mètres.

3. Le vecteur gradient est orthogonal à la ligne de niveau et dirigé dans le sens de la montée. La montée au point A semble plus forte qu'en B car les lignes de niveau plus rapprochées ; ainsi la gradient en A est plus long qu'en B.

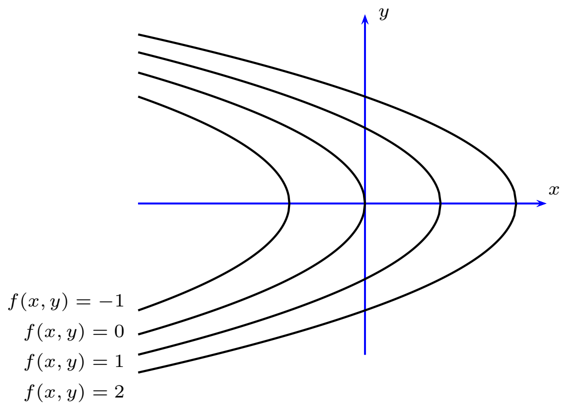
4. Oui, la fonction f possède un minimum (voir dessin). Cela correspond à une vallée.

Solution 44.

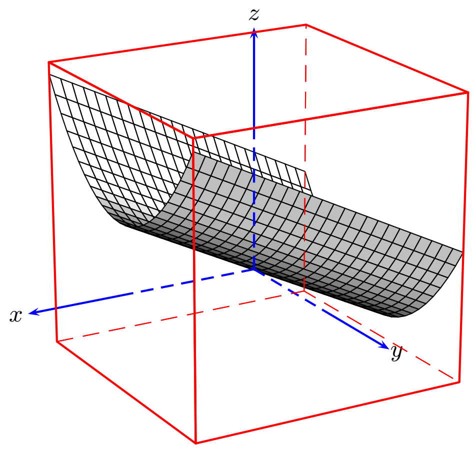
1. Pour obtenir les lignes de niveau de f on résout, pur différentes valeurs de z, l'équation $f(x, y) = z$. Par exemple,

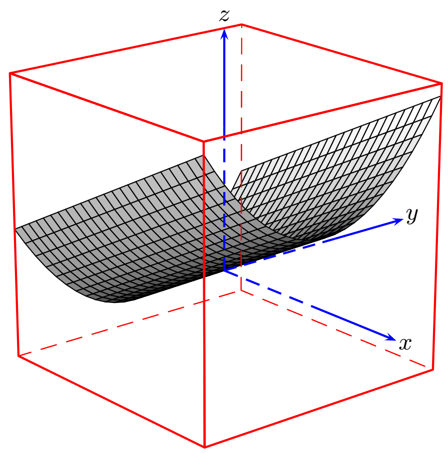
$$\begin{aligned} x + y^2 = 0 &\iff x = -y^2 \\ x + y^2 = 1 &\iff x = 1 - y^2 \\ x + y^2 = 2 &\iff x = 2 - y^2 \qquad \text{et ainsi de suite} \end{aligned}$$

Lignes de niveau sont donc des paraboles décalées horizontalement.



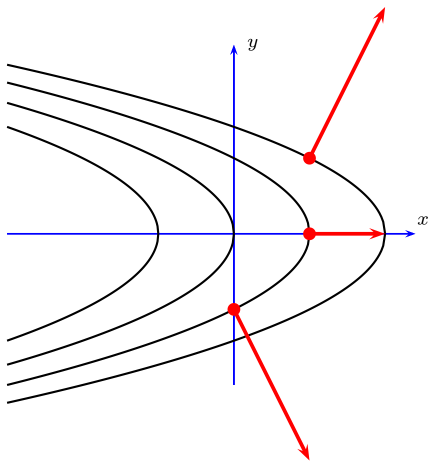
2. La surface définie par l'équation $z = f(x,y)$ a la forme d'une gouttière inclinée, dont nous donnons deux vues ci-dessous.





3. Le gradient de f vaut $\nabla f(x,y) = (1, 2y)$. On trouve

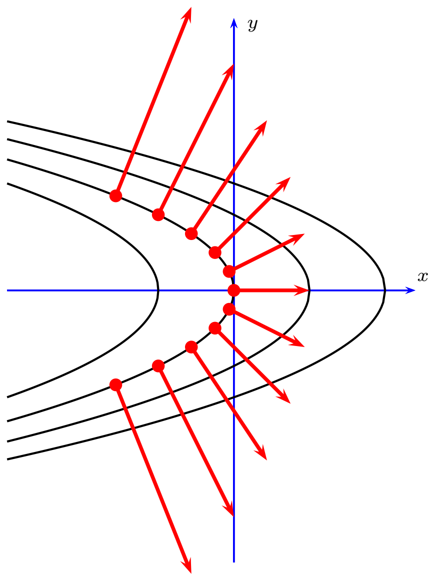
$$\nabla f(1,1) = (1,2), \qquad \nabla f(1,0) = (1,0),$$
$$\nabla f(0,-1) = (1,-2).$$



Le vecteur gradient a les trois propriétés suivantes ; elles sont valables en général :
• Direction : Il est perpendiculaire (orthogonal) à sa ligne de niveau.
• Sens : Il pointe vers les lignes de niveaux supérieurs.
• Longueur : Plus forte est la pente sur la surface d'équation $z = f(x,y)$ plus long est le vecteur gradient.

> *Résumé : Le gradient de f donne la direction de la plus forte pente sur la surface d'équation $z = f(x,y)$.*

Remarque – *Dans l'exemple de notre fonction « gouttière » on voit bien que le gradient est le plus faible au milieu de la « gouttière » ; sur les parois il augmente car la pente y devient plus forte :*

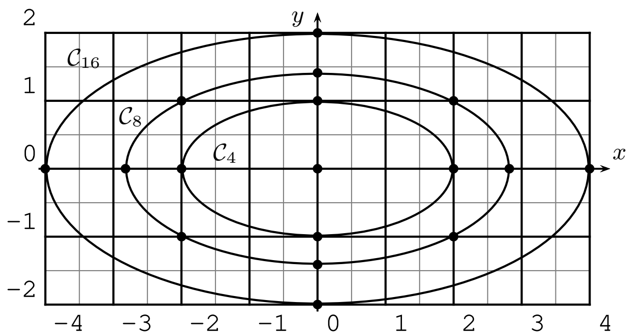


Solution 45.

1. La courbe $\mathcal{C}_4$ a pour équation $x^2 + 4y^2 = 4$. Ses intersections avec les axes de coordonnées sont $(\pm 2, 0)$ et $(0, \pm 1)$. On place déjà ces quatre points.
Ensuite on remarque que l'équation de $\mathcal{C}_4$ peut s'écrire $x^2 + (2y)^2 = 2^2$. Donc si on avait choisi 1 cm comme unité sur l'axes des abscisses et 0.5 cm comme unité sur l'axe des ordonnées, alors $\mathcal{C}_4$ serait un cercle de rayon 2 cm et de centre l'origine. Par conséquence, dans un repère orthonormé la courbe $\mathcal{C}_4$ est un « cercle aplati » par un retrécissement vertical de facteur 2 ; on l'appelle *ellipse*.

De même $\mathcal{C}_{16}$ est une ellipse et ses intersections avec les axes de coordonnées sont $(\pm 4, 0)$ et $(0, \pm 2)$.

Enfin $\mathcal{C}_8$ est l'ellipse contentant $(\pm 2\sqrt{2}, 0)$, $(0, \pm\sqrt{2})$ et aussi les points de coordonnées entières $(\pm 2, \pm 1)$.



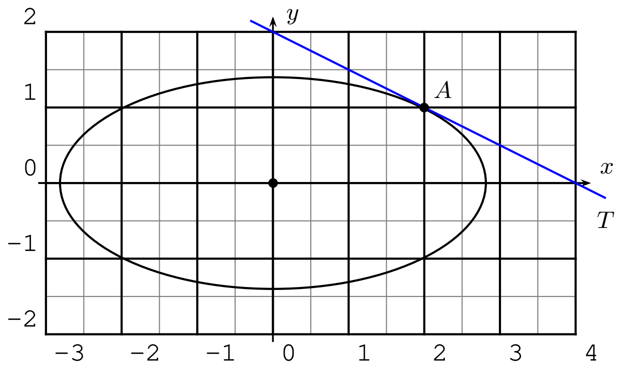
2. Notons A le point $(2, 1)$ et T_A la tangente à la courbe de niveau au point A. Puisque le gradient $\nabla f(A)$ est orthogonal à T_A (« le gradient est orthogonal à la ligne de niveau »), on déduit que T_A est constitué de tous les points P du plan qui vérifient la condition

$$(*) \qquad \nabla f(A) \perp \overrightarrow{AP}.$$

On calcule $\nabla f(x, y) = (2x, 8y)$, d'où $\nabla f(A) = (4, 8)$. On rappelle que deux vecteurs sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul. Si on note (x, y) les coordonnées du point P la condition $(*)$ devient

$$4(x-2) + 8(y-1) = 0.$$

C'est l'équation de la tangente T ! On peut aussi l'écrire sous la forme $y = -\frac{1}{2}(x-2) + 1$.



3. Rappelons que, pour une fonction d'une variable, le développement de Taylor d'ordre 1 donne l'équation de la droite tangente

$$y = f(a) + f'(a)(x-a).$$

De même, pour une fonction de deux variables, le développement de Taylor d'ordre 1 donne l'équation du plan tangent

$$z = f(a, b) + \nabla f(a, b) \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix}.$$

Dans notre cas, $(a, b) = (2, 1)$, $f(a, b) = 8$ et $\nabla f(A) = (4, 8)$. Ainsi l'équation du plan tangent est

$$z = 8 + (4, 8) \begin{pmatrix} x-2 \\ y-1 \end{pmatrix}$$

ce qui revient à $z = 8 + 4(x-2) + 8(y-1)$ ou encore

$$4x + 8y - z = 8.$$

Solution 46.

1. Dérivées premières de $u(x, y) = xy^{-1}$:

$$\partial_x u(x, y) = y^{-1}, \qquad \partial_y u(x, y) = -xy^{-2}.$$

Dérivées secondes :

$$\begin{aligned}
\partial_{xx} u(x, y) &= \partial_x [y^{-1}] = 0 \\
\partial_{yy} u(x, y) &= \partial_y [-xy^{-2}] = 2xy^{-3} \\
\partial_{xy} u(x, y) &= \partial_x [-xy^{-2}] = -y^{-2} \\
\partial_{yx} u(x, y) &= \partial_y [y^{-1}] = -y^{-2}.
\end{aligned}$$

On remarque que les dérivées mixtes par rapport à x et y sont identiques. Dans la classe des fonctions utilisées dans ce cours ça sera toujours le cas (théorème de Schwarz). C'est pourquoi dans la suite nous ne distinguerons plus entre les opérateurs ∂_{xy} et ∂_{yx}.

2. Dérivées premières de $f(x, y) = x^y = e^{y\,\ell n(x)}$:

$$\partial_x f(x, y) = yx^{y-1}, \qquad \partial_y f(x, y) = \ell n(x) x^y.$$

Dérivées secondes :

$$\begin{aligned}
\partial_{xx} f(x, y) &= \partial_x [yx^{y-1}] = y(y-1)x^{y-2} \\
\partial_{yy} f(x, y) &= \partial_y [\ell n(x) x^y] = \ell n(x)^2 x^y \\
\partial_{xy} f(x, y) &= \partial_x [\ell n(x) x^y] = x^{-1}x^y + \ell n(x) y x^{y-1} \\
&= x^{y-1}(1 + \ell n(x) y) \\
\partial_{yx} f(x, y) &= \partial_y [yx^{-1}x^y] = x^{-1}x^y + yx^{-1}\,\ell n(x) x^y \\
&= x^{y-1}(1 + \ell n(x) y).
\end{aligned}$$

Le théorème de Schwarz est de nouveau confirmé.

3. Dérivées premières de $g(x, y) = e^{2x}y^2 + 2y$:

$$\partial_x g(x, y) = 2e^{2x}y^2, \qquad \partial_y g(x, y) = 2e^{2x}y + 2.$$

Dérivées secondes :

$$\begin{aligned}\partial_{xx}g(x,y) &= \partial_x[2e^{2x}y^2] = 4e^{2x}y^2\\ \partial_{yy}g(x,y) &= 2e^{2x}\\ \partial_{xy}g(x,y) &= \partial_{yx}g(x,y) = 4e^{2x}y.\end{aligned}$$

4. Dérivées premières de $h(x,y) = \ell n(x)(x^2-1)y$:

$$\begin{aligned}\partial_x h(x,y) &= x^{-1}(x^2-1)y + \ell n(x)2xy\\ &= (2x\,\ell n(x) + x - x^{-1})y,\\ \partial_y h(x,y) &= \ell n(x)(x^2-1).\end{aligned}$$

Dérivées secondes :

$$\begin{aligned}\partial_{xx}h(x,y) &= \partial_x[(2x\,\ell n(x) + x - x^{-1})y]\\ &= (2\,\ell n(x) + 3 + x^{-2})y,\\ \partial_{yy}h(x,y) &= \partial_y[x^2\,\ell n(x) - \ell n(x)] = 0,\\ \partial_{xy}h(x,y) &= \partial_{yx}h(x,y) = \partial_y[(2x\,\ell n(x) + x - x^{-1})y]\\ &= 2x\,\ell n(x) + x - x^{-1}.\end{aligned}$$

Il n'est pas surprenant que la dérivée seconde $\partial_{yy}h$ est nulle car h est une fonction affine (même linéaire) en y.

Solution 47.

Rappel du cours : Soit (a,b) un point critique (ou stationnaire) de f. On note $\left(\begin{smallmatrix} r & s\\ s & t\end{smallmatrix}\right)$ la matrice hessienne en (a,b). On distingue les cas suivants :

1. On a $rt-s^2 > 0$ et $r > 0$. Dans ce cas f est convexe au voisinage de (a,b) et possède un minimum en (a,b).
2. On a $rt-s^2 > 0$ et $r < 0$. Dans ce cas f est concave au voisinage de (a,b) et possède un maximum en (a,b).
3. On a $rt-s^2 < 0$. Dans ce cas f possède un col (ou point selle) en (a,b).
4. On a $rt-s^2 = 0$. Dans ce cas on appelle (a,b) un point critique dégénéré et on ne peut pas en déduire quelque chose sur le comportement de f au voisinage de (a,b). Il faudrait calculer des dérivées d'ordre trois ou plus...

Maintenant on vérifie ce critère sur les quatre exemples qu'on a visualisés sur Google. Ils ont tous $(0,0)$ comme point critique.

- Si $f(x,y) = x^2+y^2$ alors la matrice hessienne est $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 0\\ 0 & 2\end{smallmatrix}\right)$. On est dans le cas 1. Et effectivement on voit le minimum sur la surface visualisée grâce à Google.
- Si $f(x,y) = -x^2-y^2$ alors la matrice hessienne est $\left(\begin{smallmatrix} -2 & 0\\ 0 & -2\end{smallmatrix}\right)$. C'est le cas 2. Sur le graphique de Google on voit bien le maximum.
- Si $f(x,y) = x^2-y^2$ alors la matrice hessienne est $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 0\\ 0 & -2\end{smallmatrix}\right)$. C'est le cas 3. Sur le graphique de Google on voit bien le col.
- Si $f(x,y) = -x^2+y^2$ alors la matrice hessienne est $\left(\begin{smallmatrix} -2 & 0\\ 0 & 2\end{smallmatrix}\right)$. C'est encore le cas 3.

Solution 48.

1. $g,\ f,\ h,\ \ell,\ k$.

2. $\ell,\ f,\ g$. Le dernier dessin avec les lignes de niveau parallèles à l'axe des x correspond aux deux fonctions h et k (mais si on considère des niveaux équirépartis la répartition des lignes n'est pas la même dans les deux cas).

Solution 49.

- Recherche des points stationnaires. Le gradient

$$\nabla f(x,y) = (2xy - 18x, x^2 - 4y)$$

s'annule si et seulement si

$$\begin{cases} 2x(y-9) = 0\\ x^2 - 4y = 0\end{cases} \iff \begin{cases} y = 9 \quad \text{ou} \quad x = 0\\ x^2 = 4y\end{cases}$$

Ainsi f possède trois points stationnaires,

$$(0,0),\ (6,9),\ (-6,9).$$

- La matrice hessienne est

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2y-18 & 2x\\ 2x & -4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & s\\ s & t\end{pmatrix}.$$

En particulier

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} -18 & 0\\ 0 & -4\end{pmatrix}, \qquad H_f(6,9) = \begin{pmatrix} 0 & 12\\ 12 & -4\end{pmatrix},$$
$$H_f(-6,9) = \begin{pmatrix} 0 & -12\\ -12 & -4\end{pmatrix}.$$

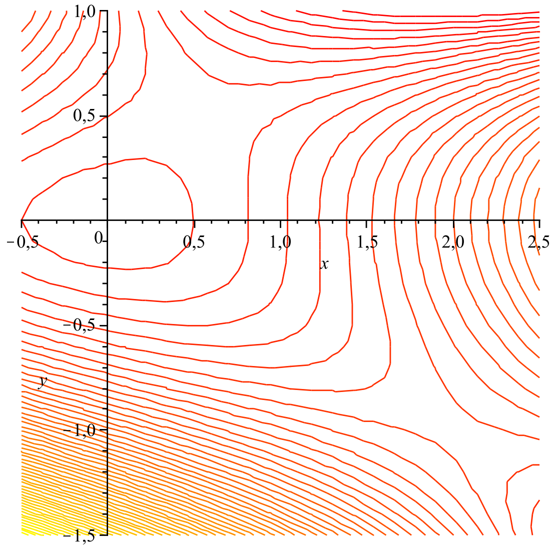
En $(0,0)$ on a $rt-s^2 > 0$ et $r < 0$. Donc f est une fonction concave au voisinage de $(0,0)$ et possède un maximum en $(0,0)$.
En $(\pm 6,9)$ on a $rt-s^2 < 0$. Donc f a des points selle en $(6,9)$ et $(-6,9)$.

Remarque – *Le maximum 0 en $(0,0)$ n'est pas un maximum global. En effet, la courbe de $x \mapsto f(x,10) = x^2 - 200$ est un parabole convexe et, par conséquence, la fonction f prend des valeurs arbitrairement. Elle n'admet pas de maximum global.*

Solution 50.

On calcule le gradient
$$\nabla\varphi(x,y) = \left(4x - 8y^2\,,\ -16xy - 16y^2 + 16y\right),$$
puis la matrice hessienne
$$H_\varphi(x,y) = \begin{pmatrix} 4 & -16y \\ -16y & -16x - 32y + 16 \end{pmatrix}.$$
Pour trouver les points critiques de φ, on résout le système $\nabla\varphi(x,y) = (0,0)$, c'est-à-dire :
$$\begin{cases} 4x - 8y^2 = 0 \\ -16xy - 16y^2 + 16y = 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x - 2y^2 = 0 \\ y(x+y-1) = 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x - 2y^2 = 0 \\ y(2y^2+y-1) = 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x - 2y^2 = 0 \\ 2y(y-\frac{1}{2})(y+1) = 0 \end{cases}$$
Dans la dernière étape on a factorisé $2y^2 + y - 1$ grâce au calcul du discriminant. On trouve finalement qu'il existe exactement trois points critiques : $(0,0)$, $(2,-1)$ et $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$. On détermine les signes des déterminants des matrices hessiennes en ces points. On a
$$H_\varphi(0,0) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}, \quad rt - s^2 > 0 \text{ et } r > 0\,.$$
Ces deux inégalités montrent que φ est convexe au voisinage du point $(0,0)$; il y a donc un minimum en ce point. En les deux autres points critiques le déterminant hessien et négatif et il y a donc des cols :
$$H_\varphi(2,-1) = \begin{pmatrix} 4 & 16 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}, \quad rt - s^2 < 0$$
$$H_\varphi\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} 4 & -8 \\ -8 & -8 \end{pmatrix}, \quad rt - s^2 < 0.$$

Voici un dessin des lignes de niveau où l'on reconnaît très bien l'extremum et les deux cols.



Remarque – *Le minimum -8 en $(0,0)$ n'est pas un minimum global. En effet, il n'existe pas de minimum global car la fonction φ prend des valeurs en dessous de toute valeur négative donnée. Le calcul de la limité suivante le prouve :*
$$\lim_{y\to\infty} \varphi(x,y) = \lim_{y\to\infty} y^3\left(\frac{2x^2}{y^3} - \frac{8x}{y} - \frac{16}{3} + \frac{8}{y} - \frac{8}{y^3}\right)$$
$$= \infty \times \left(-\frac{16}{3}\right) = -\infty.$$

Solution 51.

La fonction est définie si et seulement si $y \neq 0$. Ainsi l'ensemble de définition de ψ est $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$, c'est-à-dire le plan privé de l'axe des abscisses. On calcule le gradient
$$\nabla\psi(x,y) = \left(\frac{(1-x)e^{-x}}{y}\,,\ -\frac{xe^{-x}}{y^2} + \frac{1}{e}\right),$$
puis la matrice hessienne
$$H_\psi(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{(x-2)e^{-x}}{y} & \dfrac{(x-1)e^{-x}}{y^2} \\ \dfrac{(x-1)e^{-x}}{y^2} & \dfrac{2xe^{-x}}{y^3} \end{pmatrix}.$$
Pour trouver les points critiques de ψ, on résout le système $\nabla\psi(x,y) = (0,0)$, c'est-à-dire :
$$\begin{cases} \dfrac{(1-x)e^{-x}}{y} = 0 \\ \dfrac{1}{e} - \dfrac{xe^{-x}}{y^2} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 1 - x = 0 \\ y^2 - xe^{1-x} = 0 \end{cases}$$
On trouve finalement qu'il existe exactement deux points critiques : $(1,1)$ et $(1,-1)$. On détermine les signes des déterminants hessiens en ces points :
$$H_\psi(1,1) = \begin{pmatrix} -e^{-1} & 0 \\ 0 & 2e^{-1} \end{pmatrix}, \quad rt - s^2 = -2e^{-2} < 0$$
$$H_\psi(1,-1) = \begin{pmatrix} e^{-1} & 0 \\ 0 & -2e^{-1} \end{pmatrix}, \quad rt - s^2 = -2e^{-2} < 0\,.$$
Les deux points critiques sont donc des cols.

Solution 52.

Le profit est

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \text{recettes} - \text{coût} \\ &= xp + yq - c(x,y) \\ &= x(50-2x) + y(30-y) - (x^2+2xy+y^2+20) \\ &= -3x^2 - 2y^2 - 2xy + 50x + 30y - 20. \end{aligned}$$

On calcule

$$\nabla f(x,y) = (-6x-2y+50, -4y-2x+30)$$

$$H(f)(x,y) = \begin{pmatrix} -6 & -2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Avec le critère habituel on voit que f est une fonction concave. Son unique point critique est $(7,4)$. Pour maximiser le profit on doit produire 7 exemplaires du produit A et 4 exemplaires du produit B. Le profit maximal est donc $f(7,4) = 215$ €. Cela correspond aux prix 36 € pour A et 26 € pour B.

Remarque – *Evidemment on peut aussi exprimer le profit en fonction de p et de q. Pour cela il suffit de substituer x et y par leurs expressions en p et q. Ainsi on cherche le maximum d'une fonction des deux variables p et q ; on trouvera encore le même résultat.*

Solution 53.

1. On calcule les dérivées partielles premières de la fonction f : $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x+2y+2$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y} = y^2+2y+2x-2$. Le gradient de la fonction f est :

$$\nabla(f) = \left(2x+2y+2\,,\ y^2+2y+2x-2\right).$$

2. On calcule les dérivées partielles secondes de la fonction f : tout d'abord celles qui commencent par une dérivée par rapport à x, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(2x+2y+2\right) = 2$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(2x+2y+2\right) = 2$.
Puis celles qui commencent par une dérivée par rapport à y, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(y^2+2y+2x-2\right) = 2$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(y^2+2y+2x-2\right) = 2y+2$.
La matrice Hessienne de f est donc :

$$H(f) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2y+2 \end{pmatrix}.$$

3. Pour trouver les points critiques de f, on résout $\nabla(f) = (0,0)$, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} 2x+2y+2 = 0 \\ y^2+2y+2x-2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1-y \\ y^2+2y+2(-1-y)-2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1-y \\ y^2-4 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 2 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases}$$

On trouve donc deux points critiques : le point $M = (-3,2)$ et le point $N = (1,-2)$.

4. Pour le point $M = (-3,2)$, la matrice Hessienne est (on prend $y = 2$) :

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix};$$

on calcule le Hessien $2\cdot 6 - 2\cdot 2 = 8 > 0$ donc M est un extremum local. Comme de plus $2 > 0$, alors M est un minimum local.
(Remarque : On peut voir facilement que $f(x,y) \to -\infty$ quand y tend vers $-\infty$. Donc le minimum local trouvé n'est pas un minimum global.)

Pour le point $N = (1,-2)$, la matrice Hessienne est (on prend $y = -2$) :

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix};$$

on calcule le Hessien $2\cdot(-2) - 2\cdot 2 = -8 < 0$ donc N est un point selle.

Solution 54.

1. Pour (x,y) proche de (a,b) on a

$$\begin{aligned} f(x,y) &\approx f(a,b) + \nabla f(a,b)\begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} \\ &= f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b). \end{aligned}$$

2. Le point $(1.1, 0.9)$ étant proche de $(1,1)$ on fait un développement de Taylor au point $(1,1)$. On calcule

$$\nabla f(x,y) = (3x^2, -3y^2), \quad \nabla f(1,1) = (3,-3).$$

Ainsi