

Théorème 1 : Toute suite bornée admet une valeur d'adhérence.

DEMST : Soit (u_n) une suite de $[a, b]$. On considère l'ensemble

$$A = \{x / [x, +\infty[\text{ contient une infinité de valeurs}\}.$$

$a \in A$, donc $A \neq \emptyset$.

A est borné car si $x > b$ alors $[x, +\infty[$ ne contient aucun terme.

Soit $l = \text{Sup } A$ et $\varepsilon > 0$. Il existe $\alpha \in A$, $l - \varepsilon < \alpha \leq l$ et donc $[\alpha, +\infty[$ contient une infinité de termes de la suite.

Comme $l + \varepsilon > l$, $[l + \varepsilon, +\infty[$ ne contient qu'un nombre fini de termes de la suite.

Il existe donc une infinité de terme dans l'intervalle $]l - \varepsilon, l + \varepsilon[$.