Exercice 1.

Sans calculatrice et en utilisant la dérivée, donner des valeurs approchées de

$$\sqrt{99}\,; \qquad e^{0.01}\,; \qquad 5.04^4\,; \qquad \frac{1}{51^2}\,.$$

Dans chaque cas spécifier si votre approximation est plus grande ou plus petite que la valeur exacte.

Exercice 2.

Déterminer le développement limité de :

1. $x \mapsto \sin(x)$, à l'ordre 5, au voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$;
2. $x \mapsto \tan(x)$, à l'ordre 3, au voisinage de $\frac{\pi}{4}$;
3. $x \mapsto \sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x}}$, à l'ordre 2, au voisinage de $+\infty$.

Exercice 3.

Une fonction f vérifie $f(x) = x + \mathrm{o}(x^6)$ au voisinage de 0. Que dire de

$$f(x)^2, f(x)^3, f(x)^4, f(x)^5, f(x)^6$$

et $f(x)^7$?

Exercice 4.

On a, au voisinage de 0,

$$f(x) = x + x^2 + \mathrm{o}(x^2) \quad \text{et} \quad g(x) = x^3 + x^4 + \mathrm{o}(x^4).$$

Que dire de $f(x) \times g(x)$?

Exercice 5.

Lever les formes indéterminées suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x\cos(x) - \tan(x)}{\sin^3(x)}$;
2. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x\cos(x) - \tan(x)}{\sin(x)(x - \tan(x))}$;
3. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ell\mathrm{n}(x)}\right)$;
4. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$.

Exercice 6.

Déterminer des équivalents simples en 0 des expressions suivantes,

1. $\arccos(x) - \pi/2$;
2. $x^4 + x + x^2$;
3. $\arcsin(x) + x + x^2$;
4. $\arctan(x) + x$;
5. $\frac{1}{1-x} - 1 + x$;
6. $\frac{x^2}{1+x} - x$.

Exercice 7.

Calculer

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\ell\mathrm{n}(x)} \times \left[(1+x)^{1/x} - 1\right].$$

Exercice 8.

Pour quelles valeurs entières de n la fonction

$$f : x \neq 0 \longmapsto |x|^{9/4} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

admet-elle un $DL_n(0)$?

Exercice 9.

Chercher trois termes du développement asymptotique de la fonction f définie par

$$f(x) = \sqrt{x^2 + x}$$

au voisinage de $+\infty$.

Exercice 10.

Déterminer un développement asymptotique à trois termes en $+\infty$ de l'expression,

$$\sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x}.$$

1. Solutions

Solution 1.

► On considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$. On fait l'approximation de la courbe par la tangente. Pour x proche de 100 on a

$$f(x) \approx f(100) + f'(100)(x-100) = 10 + \frac{1}{20}(x-100).$$

Puisque 99 peut être considéré comme proche de 100, on a

$$\sqrt{99} \approx 10 + \frac{1}{20} \times (-1) = 9.95.$$

La valeur exacte de $\sqrt{99}$ est un peu plus petite car la courbe est située en dessous de la tangente (fonction concave).

► Pour x proche de 0 on a

$$\exp(x) \approx \exp(0) + \exp'(0)(x-0) = 1 + x.$$

Donc $e^{0,01} \approx 1,01$. La valeur exacte de $e^{0,01}$ est un peu plus grande car la courbe est située en dessus de la tangente (fonction convexe).

► On considère la fonction $g : x \mapsto x^4$. Pour x proche de 5 on a

$$g(x) \approx g(5) + g'(5)(x-5) = 625 + 4 \times 5^3(x-5).$$

Donc

$$\begin{aligned} 5.04^4 &\approx 625 + 4 \times 5^3 \times 0.04 \\ &= 625 + 500 \times 0.04 = 645. \end{aligned}$$

La valeur exacte de 5.04^4 est un peu plus grande car la courbe est située en dessus de la tangente (fonction convexe).

► On considère la fonction $h : x \mapsto x^{-2}$. Pour x proche de 50 on a

$$\begin{aligned} h(x) &\approx h(50) + h'(50)(x-50) \\ &= 50^{-2} - 2 \times 50^{-3}(x-50). \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{51^2} &\approx \frac{1}{50^2} - \frac{2}{50^3} \\ &= \frac{2^2}{2^2 50^2} - \frac{2^4}{2^3 50^3} \\ &= \frac{4}{100^2} - \frac{16}{100^3} \\ &= 0.0004 - 0.000016 = 0.000384. \end{aligned}$$

La valeur exacte de $1/51^2$ est un peu plus petite car la courbe est située en dessous de la tangente (fonction concave).

Solution 2.

1. La formule de Taylor-Young donne immédiatement, au voisinage de 0 :

$$\sin(x_0 + h) = \sin(x_0) + h\cos(x_0) - \frac{h^2}{2}\sin(x_0) - \frac{h^3}{6}\cos(x_0) + \frac{h^4}{24}\sin(x_0) + \frac{h^5}{120}\cos(x_0) + o(h^5)$$

2. On calcule facilement les trois premières dérivées de tan en $\frac{\pi}{4}$; on en déduit que $\tan'(\frac{\pi}{4}) = 2$, $\tan^{(2)}(\frac{\pi}{4}) = 4$ et $\tan^{(3)}(\frac{\pi}{4}) = 16$. Par Taylor-Young, on déduit qu' au voisinage de 0 :

$$\tan(\frac{\pi}{4} + h) = 1 + 2h + 2h^2 + \frac{8}{3}h^3 + o(h^3)$$

3. On pose $X = \frac{1}{x}$. $\sqrt[3]{\frac{x+1}{x}} = \sqrt[3]{1+X} = 1 + \frac{X}{3} - \frac{1}{9}X^2 + o(X^2)$, d'où le DL en $+\infty$:

$$\sqrt[3]{\frac{x+1}{x}} = 1 + \frac{1}{3x} - \frac{1}{9x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Solution 3.

On a successivement d'après les règles de calcul usuelles,

$$f(x)^2 = x^2 + \mathrm{o}(x^7)\ ,\ f(x)^3 = x^3 + \mathrm{o}(x^8)\ ,\ f(x)^4 = x^4 + \mathrm{o}(x^9),$$
$$f(x)^5 = x^5 + \mathrm{o}(x^{10})\ ,\ f(x)^6 = x^6 + \mathrm{o}(x^{11}),$$

et $f(x)^7 = x^7 + \mathrm{o}(x^{12})$.

Remarque – *On peut aussi invoquer la règle de composition en partant de $f(x) = x(1 + \mathrm{o}(x^5))$ pour obtenir $f(x)^n = x^n + \mathrm{o}(x^{n+5})$, pour tout entier naturel n.*

Solution 4.

D'après les règles usuelles,

$$f(x) \times g(x) = x^4 + 2x^5 + \mathrm{o}(x^5).$$

Solution 5.

1. On a, au voisinage de 0,

$$x\cos(x) = x - \frac{1}{2}x^3 + \mathrm{o}(x^3)$$

et

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \mathrm{o}(x^3).$$

Ainsi,

$$x\cos(x) - \tan(x) = -\frac{5}{6}x^3 + \mathrm{o}(x^3) \underset{0}{\sim} -\frac{5}{6}x^3.$$

D'où, puisque $\sin^3(x) \underset{0}{\sim} x^3$,

$$\frac{x\cos(x) - \tan(x)}{\sin^3(x)} \underset{0}{\sim} -\frac{5}{6}$$

et donc

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\cos(x) - \tan(x)}{\sin^3(x)} = -\frac{5}{6}.$$

2. Reprenons les résultats établis au numéro précédent...

$$x - \tan(x) \underset{0}{\sim} -\frac{1}{3}x^3,$$

d'où

$$\frac{x\cos(x) - \tan(x)}{\sin(x)(x - \tan(x))} \underset{0}{\sim} -\frac{5\,/\,6\,x^3}{-1\,/\,3\,x^4} = \frac{5}{2x}.$$

Ainsi,

$$\lim_{x\to 0+} \frac{x\cos(x) - \tan(x)}{\sin(x)(x - \tan(x))} = +\infty$$

et

$$\lim_{x\to 0-} \frac{x\cos(x) - \tan(x)}{\sin(x)(x - \tan(x))} = -\infty.$$

3. Posons $x = 1 + h$ et notons $g(x)$ l'expression de l'énoncé. On a

$$g(x) = \frac{1+h}{h} - \frac{1}{\ell\mathrm{n}(1+h)}.$$

Or,

$$\frac{1}{\ell\mathrm{n}(1+h)} \underset{0}{=} \frac{1}{h(1 - h\,/\,2 + \mathrm{o}(h))} = \frac{1 + h\,/\,2 + \mathrm{o}(h)}{h}$$
$$\underset{0}{=} \frac{1}{h} + \frac{1}{2} + \mathrm{o}(1)$$

et donc

$$\frac{1+h}{h} - \frac{1}{\ell\mathrm{n}(1+h)} \underset{0}{=} 1 - \frac{1}{2} + \mathrm{o}(1) = \frac{1}{2} + \mathrm{o}(1).$$

Ainsi,

$$\lim_{x\to 1} g(x) = \frac{1}{2}.$$

4. Posons $x = 1 + h$ et notons $g(x)$ l'expression de l'énoncé. On a

$$g(x) = \frac{(1+h)^{\frac{1}{2}} - 1}{(1+h)^{\frac{1}{3}} - 1}.$$

Or,pour $\alpha \neq 0$,

$$(1+h)^{\alpha} - 1 \underset{0}{\sim} \alpha h$$

et donc

$$\frac{(1+h)^{\frac{1}{2}} - 1}{(1+h)^{\frac{1}{3}} - 1} \underset{0}{\sim} \frac{\frac{1}{2}h}{\frac{1}{3}h} = \frac{3}{2}.$$

Ainsi,

$$\lim_{x\to 1} g(x) = \frac{3}{2}.$$

Solution 6.

1. On a au voisinage de 0,

$$\arccos(x) - \frac{\pi}{2} = -\arcsin(x) \underset{0}{\sim} -x.$$

2. On a au voisinage de 0,

$$x^4 + x + x^2 \underset{0}{\sim} x.$$

3. On a au voisinage de 0,

$$\arcsin(x) + x + x^2 = x + x + \mathrm{o}(x) \underset{0}{\sim} 2x.$$

4. On a au voisinage de 0,

$$\arctan(x) + x = x + x + \mathrm{o}(x) \underset{0}{\sim} 2x.$$

5. On a pour $x \neq 1$,

$$\frac{1}{1-x} - 1 + x = \frac{2x - x^2}{1-x},$$

ainsi au voisinage de 0,

$$\frac{1}{1-x} - 1 + x \underset{0}{\sim} \frac{2x}{1} = 2x.$$

6. On a

$$\frac{x^2}{1+x} \underset{0}{=} \mathrm{o}(x),$$

ainsi

$$\frac{x^2}{1+x} - x = -x + \mathrm{o}(x) \underset{0}{\sim} -x.$$

Solution 7.

On a au voisinage de $+\infty$,

$$(1+x)^{1/x} - 1 = e^{\frac{\ell n(1+x)}{x}} - 1 \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ell n(1+x)}{x},$$

donc

$$(1+x)^{1/x} - 1 \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ell n(x)}{x},$$

ainsi , en notant $f(x)$ l'expression de l'énoncé ,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1.$$

Solution 8.

Pour tout x non nul,

$$\left|f(x)/x^2\right| \leqslant |x|^{\frac{1}{4}},$$

ainsi $f(x) \underset{0}{=} o(x^2)$ et f admet un $DL_2(0)$. Raisonnons par l'absurde en supposant que f admet un $DL_n(0)$ pour $n \geqslant 3$. Alors f admet par troncature un $DL_3(0)$. D'après ce qui précède, ce DL est nécessairement de la forme

$$f(x) \underset{0}{=} ax^3 + o(x^3),$$

où $a \in \mathbb{R}$. Ce résultat est absurde car

$$g(x) = \frac{f(x)}{x^3}$$

ne peut tendre vers a lorsque x tend vers 0 puisque la suite définie par

$$g\left(\frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}\right) = \left|\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right|^{\frac{3}{4}}$$

tend vers $+\infty$, ce qui contredit le critère séquentiel sur les limites.

Solution 9.

Il est possible d'obtenir certains développements asymptotiques au voisinage de $+\infty$ ou de $-\infty$ en posant $x = 1/u$, ce qui ramène le problème à 0^+ (ou 0^-). Posant $x = 1/u$, on se ramène à u tendant vers 0^+. Or,

$$\begin{aligned} f(1/u) &= \sqrt{1/u^2 + 1/u} = \frac{\sqrt{1+u}}{u} \\ &= \frac{1 + u/2 - u^2/8 + o(u^2)}{u} \\ &= 1/u + 1/2 - u/8 + o(u) \end{aligned}$$

d'où

$$f(x) = x + \frac{1}{2} - \frac{1}{8x} + o(1/x).$$

Bien entendu, on aurait pu aussi mettre directement le terme dominant en facteur en écrivant $f(x) = x\sqrt{1+\frac{1}{x}}$, ce qui ramène au problème de $\sqrt{1+u}$ au voisinage de 0.

Solution 10.

Pour tout $x > 0$, en notant $f(x)$ l'expression de l'énoncé, on a immédiatement

$$f(x) = \sqrt{x}\left[\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}} - 1\right].$$

Or, puisque $(1+u)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{u}{2} - \frac{u^2}{8} + \frac{u^3}{16} + o(u^3)$ quand $u \to 0$, on a pour $x \to \infty$

$$\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}} - 1 = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{8x} + \frac{1}{16x\sqrt{x}} + o\left(\frac{1}{x\sqrt{x}}\right).$$

et donc le développement asymptotique d'ordre trois de $f(x)$ est

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{8\sqrt{x}} + \frac{1}{16x}.$$