Exercice 1.

Man finde Teilmengen $A, B \subset \mathbb{R}$ und eine stetige Bijektion $f : A \to B$, so dass f^{-1} nicht stetig ist.

Exercice 2.

Déterminer toutes les fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $f(t^2) = f(t)$ pour tout $t \in [0,1]$.

Exercice 3.

Soit f une *isométrie de* $\mathbb{R}$, c'est-à-dire une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad |f(x) - f(y)| = |x - y|.$$

Pour tout réel x, on pose $g(x) = f(x) - f(0)$.

1. Etablir que f et g sont continues sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer $(g(x))^2$ pour tout réel x et en calculant $(g(x) - g(y))^2$, démontrer que $g(x)g(y) = xy$ pour tous réels x et y.
3. En déduire l'expression de f.

Exercice 4.

Find all numbers n in $\mathbb{N}^*$ such that there exists a continuous function from $\mathbb{R}$ to $\mathbb{R}$ which takes every value exactly n times.

Exercice 5.

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction continue. On suppose qu'il existe $\ell \in [0,1[$ tel que $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x} = \ell$. Montrer que f possède au moins un point fixe.

Exercice 6.

Soit f une fonction numérique continue sur $[0,1]$ telle que $f(0) = f(1)$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $x \in [0,1]$ tel que $f\left(x + \frac{1}{n}\right) = f(x)$.

Exercice 7.

Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable s'annulant en a et en b vérifiant $f'(a) > 0$ et $f'(b) > 0$. Démontrer l'existence de trois réels $c_1 < c_2 < c_3$ tels que

$$f'(c_1) = f'(c_2) = f'(c_3) = 0.$$

Exercice 8.

Soit $T \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable périodique. Montrer que T est une période de f *si et seulement si* T est une période de f'.

Exercice 9.

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}^*$ une fonction continue, dérivable sur $]a,b[$. Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$\frac{f(b)}{f(a)} = \exp\left((b-a)\frac{f'(c)}{f(c)}\right).$$

Exercice 10.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. Montrer qu'il existe des réels $0 < x_1 < \cdots < x_n < 1$ tels que

$$\sum_{k=1}^{n} f'(x_k) = n.$$

Exercice 11.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{2\sqrt{n + u_n}}.$$

1. Grace à un dessin donner une interprétation géométrique de u_0 et de u_1. Que conjecturez sur la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$?
2. Prouver votre conjecture.

Exercice 12.

Etudier le comportement asymptotique de la suite de terme général

$$u_n = \sin(\ell n(n+1)) - \sin(\ell n(n)).$$

1. Solutions

Solution 1.

Es sei

$$f\ :\ [0,1]\cup]2,3] \longrightarrow [0,2]\,,\ x \longmapsto \begin{cases} x & \text{wenn } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ x-1 & \text{wenn } 2 < x \leqslant 3. \end{cases}$$

Es klar, dass f eine stetige und bijektive Abbildung ist. Aber die Umkehrabbildung ist nicht stetig, denn

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 1} f^{-1}(x) = 2 \neq 1 = f^{-1}(1).$$

Solution 2.

À l'aide d'une récurrence, nous avons $f(t^{2^n}) = f(t)$ pour tous $t \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}$. Si $t \in [0,1[$ la suite $(t^{2^n})_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite 0. En faisant tendre n vers $+\infty$ dans l'égalité précédente et en utilisant la continuité de f en 0, on obtient $f(0) = f(t)$. La fonction f est donc constante sur $[0,1[$. La continuité de f au point 1 permet de conclure que f est constante sur $[0,1]$.

Solution 3.

1. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction lipschitzienne sur cet intervalle. La fonction g est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de fonctions continues sur $\mathbb{R}$.

2. On a, pour tout réel x,

$$\begin{aligned}(g(x))^2 &= |g(x)|^2 = |f(x)-f(0)|^2 \\ &= |x-0|^2 = x^2\end{aligned}$$

De plus, pour tous réels x et y,

$$\begin{aligned}(g(x)-g(y))^2 &= |g(x)-g(y)|^2 = |f(x)-f(y)|^2 \\ &= |x-y|^2 = x^2 - 2xy + y^2\end{aligned}$$

Or, on a aussi

$$\begin{aligned}(g(x)-g(y))^2 &= (g(x))^2 - 2g(x)g(y) + (g(y))^2 \\ &= x^2 - 2g(x)g(y) + y^2\end{aligned}$$

et donc

$$g(x)g(y) = xy.$$

3. On remarque que g est injective (si $g(x) = g(y)$ alors $f(x) = f(y)$ et $|x-y| = 0$, d'où $x = y$). Comme $g(0) = 0$, on a $g(1) \neq 0$ et donc

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad g(x) = \frac{x}{g(1)}.$$

Ainsi $\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad f(x) = ax + b.$$

Réciproquement, une fonction de la forme

$$x \in \mathbb{R} \mapsto f(x) = ax + b,$$

avec a et b réels est une isométrie *si et seulement si*

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\quad |a(x-y)| = |x-y|,$$

ie *si et seulement si* $|a| = 1$, ie $a = \pm$. Les seules isométries de $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme

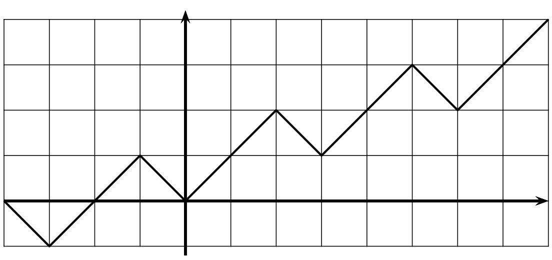
$$x \in \mathbb{R} \mapsto \pm x + b,$$

avec $b \in \mathbb{R}$.

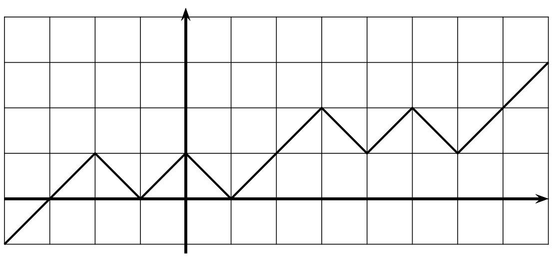
Solution 4.

Let's prove that these numbers are exactly the odd numbers.

For the case $n = 1$ the identity function is a good example. For $n = 3$ the following zigzag function works fine :



For $n = 5$ just add one edge :



For $n \geqslant 7$ add more edges.

Now let n be even. Assume that there is a continuous function $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ which takes every value exactly n times. Let x_j, $j = 1, \ldots, n$, be the zeros of f, i.e., the n

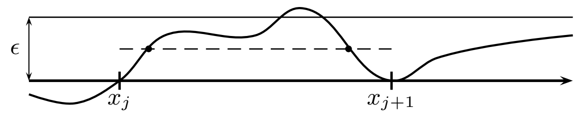
values where f takes the value 0. We can order them in a such way that $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$. Then f is either positive or negative on each interval $]-\infty, x_1[$, $]x_n, \infty[$ and $]x_j, x_{j+1}[$, $j = 1, \ldots, n-1$. In fact, if f changed sign on such an interval then the intermediate value theorem would supply an additional zero of f.
Let us now treat different cases.

- $f > 0$ on $]-\infty, x_1[\cup]x_n, \infty[$. Then the minimum of f on $[x_1, x_n]$ is global, and so f takes no value below that minimum. Contradiction. $\lightning$

- The case $f < 0$ on $]-\infty, x_1[\cup]x_n, \infty[$ leads to a contradiction as well.

- $f > 0$ on $]-\infty, x_1[$ and $f < 0$ on $]x_n, \infty[$. Let $k = n/2$. Among the intervals $]x_j, x_{j+1}[$, $j = 1, \ldots, n-1$, there are at least k intervals on which $f > 0$ or there are at least k intervals on which $f < 0$. Let's focus on the first of those two cases (the other one being similar). Let us choose among the $]x_j, x_{j+1}[$, a collection $I_1, \ldots, I_k$ of distinct intervals where $f > 0$. In each of the intervals $]-\infty, x_1[, I_1, \ldots, I_k$ we pick a real number. Consider the images of those numbers by f and let ϵ be the smallest of thoses images. According to the intermediate value theorem, the value $\epsilon/2$ is taken at least once on $]-\infty, x_1[$ and at least twice on each interval $I_1, \ldots, I_k$. Altogether $\epsilon/2$ is taken at least $1 + 2k$ times. Contradiction because $1 + 2k > n$. $\lightning$

- The case $f < 0$ on $]-\infty, x_1[$ and $f > 0$ on $]x_n, \infty[$ leads to a contradiction as well.



Solution 5.

Supposons par l'absurde que $f(x) \neq x$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$. Du théorème de valeurs intermédiaires on déduit qu'il y a deux cas : Soit $f(x) - x < 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ ou bien $f(x) - x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$. Dans le premier cas on a $f(0) - 0 < 0$, ce qui est en contradiction avec $f(0) \in \mathbb{R}_+$. Dans le deuxième cas on a $f(x)/x > 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, d'où

$$\ell = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \geqslant 1.$$

C'est en contradiction avec $\ell \in [0, 1[$.

Solution 6.

Soit $g : \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right] \to \mathbb{R}, x \mapsto f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)$. Il suffit donc de prouver que g s'annule. g est continue et

$$\sum_{k=0}^{n-1} g\left(\frac{k}{n}\right) = f(1) - f(0) = 0$$

Les $g\left(\frac{k}{n}\right)$ ne peuvent pas être tous strictement positifs ou négatifs, donc il existe $k_1, k_2 \in [\![0, n-1]\!]$ tels que $g\left(\frac{k_1}{n}\right) \leqslant 0$ et $g\left(\frac{k_2}{n}\right) \geqslant 0$. Si $k_1 = k_2$, g s'annule évidemment et si $k_1 \neq k_2$, g s'annule d'après le théorème des valeurs intermédiaires.

Solution 7.

Nous affirmons que f est de signe strictement positif *au voisinage à droite de* a, c'est-à-dire que

$$\exists n \in \mathbb{N}^* \, \forall x \in \left]a, a + \frac{1}{n}\right] \; : \; f(x) > 0.$$

En fait, supposons que le contraire soit vrai, c'est-à-dire

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \, \exists x_n \in \left]a, a + \frac{1}{n}\right] \; : \; f(x_n) \leqslant 0.$$

Alors $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, donc

$$f'(a) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)}{x_n - a} \leqslant 0,$$

car $x_n - a > 0$ et $f(x_n) \leqslant 0$. C'est en contradiction avec l'enoncé.

Puisqu'on peut faire le même raisonnement en b, il existe a' et b' dans $[a, b]$ tels que $a' < b'$ et $f'(a') > 0 > f(b')$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c_2 \in]a', b'[$ tel que $f(c_2) = 0$. En appliquant deux fois le théorème de Rolle, sur $[a, c_2]$ puis sur $[c_2, b]$, on aboutit à l'existence de c_1 et c_3 tels que

$$a < c_1 < c_2 < c_3 < b \text{ et } f'(c_1) = f'(c_3) = f(c_2) = 0.$$

Solution 8.

Supposons que T est une période de f. Alors $f(x + T) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Par dérivation on déduit que $f'(x + T) = f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Donc T est une période de f'.
Réciproquement, supposons que T est une période de f'. Considérons la fonction définie par $g(x) = f(x+T) - f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Alors g est dérivable et $g'(x) = f'(x + T) - f'(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Donc $g = c =$ cte, d'où $f(x+T) = f(x) + c$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On déduit par récurrence que $f(nT) = f(0) + nc$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Or d'après l'énoncé f est périodique et continue donc bornée. Cela implique que $c = 0$, ce qui montre que T est une période de f.

Solution 9.

Sous un habit bien impressionant se cache un énoncé presque trivial. En effet, il suffit d'appliquer le théorème des accroissements finies à la fonction définie par

$$g(x) = \ell\mathrm{n}\,|f(x)|\,.$$

Il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$g'(c) = \frac{g(b) - g(a)}{b - a},$$

ou encore

$$\frac{f'(c)}{f(c)} = \frac{\ell\mathrm{n}\,|f(b)| - \ell\mathrm{n}\,|f(a)|}{b - a} = \frac{\ell\mathrm{n}\left|\frac{f(b)}{f(a)}\right|}{b - a}\,.$$

Remarquons que dans la dernière expression on peut ôter les valeurs absolues ; en effet, f est à valeurs dans $\mathbb{R}^*$ et donc soit strictement positive ou négative sur $[a, b]$ à cause du théorème des valeurs intermédiaires. Ainsi

$$(b - a)\frac{f'(c)}{f(c)} = \ell\mathrm{n}\,\frac{f(b)}{f(a)}\,.$$

Pour conclûre il suffit de prendre l'exponentielle des deux côtés de l'égalité.

Solution 10.

Pour $n = 1$ il s'agit précisément du théorème des accroissements finis. Dans le cas général nous considérons la subdivision $0 < \frac{1}{n} < \frac{2}{n} < \cdots < \frac{n-1}{n} < 1$ de l'intervalle $[0, 1]$. Alors on a

$$\forall\, k \in [\![1, n]\!] \quad \exists\, x_k \in \left]\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right[\quad : \quad f'(x_k) = n\left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f\left(\frac{k-1}{n}\right)\right).$$

On obtient ainsi une “somme téléscope” :

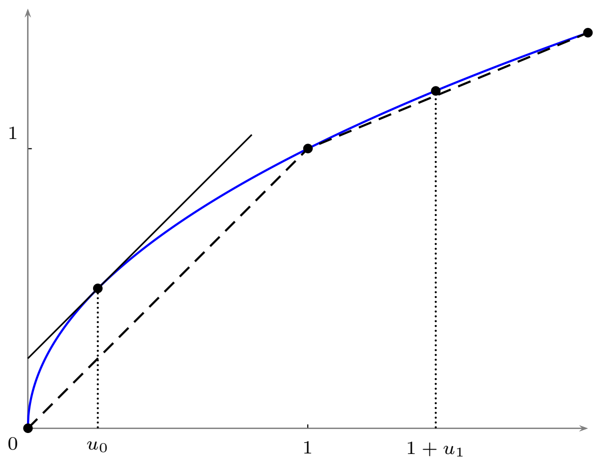
$$\sum_{k=1}^{n} f'(x_k) = n\sum_{k=1}^{n}\left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f\left(\frac{k-1}{n}\right)\right) = n(f(1) - f(0)) = n.$$

Solution 11.

1. Notons f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x}$. La valeur $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ est le coefficient directeur du segment $\mathscr{S}_n$ entre les points $(n, f(n))$ et $(n+1, f(n+1))$. La valeur u_n est définie par l'égalité

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = f'(n + u_n).$$

Autrement dit, $n + u_n$ est l'abscisse du point sur la courbe $\mathscr{C}_f$ où la tangente est parallèle au segment $\mathscr{S}_n$.



Vue la forme de la courbe $\mathscr{C}_f$, le segment $\mathscr{S}_n$ s'approche de plus en plus de $\mathscr{C}_f$ lorsque n augmente. On a l'impression que le point $n + u_n$ s'approche du milieu de l'intervalle $[n, n+1]$. Autrement dit, on conjecture que $\lim_{n\to\infty} u_n = \frac{1}{2}$.

2. On isole u_n dans l'équation de l'énoncé.

$$\begin{aligned}
& \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{2\sqrt{n + u_n}} \\
\iff \quad & n + u_n = \frac{1}{4(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})^2} \\
\iff \quad & u_n = \frac{1}{4(2n + 1 - 2\sqrt{n^2+n})} - n
\end{aligned}$$

Pour calculer la limite on écrit autrement u_n en utilisant deux fois l'astuce de « l'expression conjuguée » :

$$\begin{aligned}
u_n &= \frac{1}{4[2n + 1 - 2\sqrt{n^2+n}]} - n \\
&= \frac{2n + 1 + 2\sqrt{n^2+n}}{4[(2n+1)^2 - 4(n^2+n)]} - n \\
&= \frac{-2n + 1 + 2\sqrt{n^2+n}}{4} \\
&= \frac{(-2n+1)^2 - 4(n^2+n)}{4(-2n + 1 - 2\sqrt{n^2+n})} \\
&= \frac{1 - 8n}{4(-2n + 1 - 2\sqrt{n^2+n})} \\
&= \frac{1/n - 8}{4(-2 + 1/n - 2\sqrt{1 + 1/n})} \quad \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \quad \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Solution 12.

Notons f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par

$$x \mapsto \sin(\ell\text{n}(x)).$$

Cette fonction est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et d'après le théorème des accroissements finis, pour tout $n \geqslant 1$, il existe un réel c_n dans $]n, n+1[$ tel que

$$f(n+1) - f(n) = f'(c_n) = \frac{\cos(\ell\text{n}(c_n))}{c_n},$$

donc,

$$|f(n+1) - f(n)| \leqslant \frac{1}{c_n} \leqslant \frac{1}{n},$$

et, d'après le théorème d'encadrement,

$$\lim_{n \to +\infty} [f(n+1) - f(n)] = 0.$$