Exercice 1.

True or false ? There exists a continuous...

1. surjection from $[0,1]$ onto $[0,\infty[$.
2. bijection from $[0,1[$ to $[0,\infty[$.
3. surjection from $[0,1]$ onto $[0,1[$.
4. bijection from $]0,1]$ to $[0,1[$.
5. bijection from $]0,1[$ to $\mathbb{R}$.
6. surjection from $]0,1[$ onto $[0,1]$.
7. bijection from $]0,1[$ to $[0,1]$.
8. surjection from $]0,1]$ onto $\mathbb{R}$.
9. surjection from $]0,1]$ onto $]0,\infty[$.

Exercice 2.

Soient f et g continues sur $[0,1]$ telles que

$$\forall x \in [0,1], \quad f(x) < g(x).$$

Montrer qu'il existe $m > 0$ tel que

$$\forall x \in [0,1], \quad f(x) + m < g(x).$$

Exercice 3.

Soient f et g, deux applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, telles que $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $g(0) = 1$ et $g(1) = 0$. Démontrer que, pour tout nombre réel $\lambda \geqslant 0$, il existe un réel $x_\lambda \in [0,1]$ tel que $f(x_\lambda) = \lambda g(x_\lambda)$.

Exercice 4.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. On note

$$G = \{T \in \mathbb{R} \mid \forall x \in \mathbb{R} \,:\, f(x+T) = f(x)\}.$$

Un élément non nul de G est une *période* de f.

1. Soient $T, T' \in G$. Montrer que $-T \in G$ et $T + T' \in G$.
2. On suppose que la fonction f est continue, non constante et admet une période. Montrer que l'ensemble $G_+ = G \cap \mathbb{R}_+^*$ des périodes strictement positives possède un minimum. En déduire la forme de G.
3. La condition de continuité est-elle nécessaire dans la question précédente ?

Exercice 5.

Etudier la limite en $+\infty$ de l'expression

$$(x+1)e^{\frac{1}{x+1}} - xe^{\frac{1}{x}}.$$

Exercice 6.

Soit P un polynome réel non-constant dont les racines sont réelles et simples.

1. Montrer que les racines de P' sont aussi réelles et simples.
2. En déduire que pour tout $\alpha > 0$ les racines de $P^2 + \alpha$ sont simples.

1. Solutions

Solution 1.

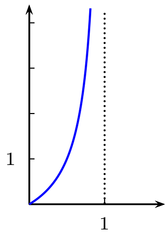
1. The statement is wrong. Suppose that $f : [0,1] \to [0,\infty[$ is continuous and surjective. Then f takes its maximum value : there exists $a \in [0,1]$ such that

$$\forall x \in [0,1] \ : \quad f(x) \leqslant f(a).$$

Thus f is not surjective since it doesn't take the value $f(a)+1$. ↯

2. The statement is true.

$$\varphi \ : \ [0,1[\ \longrightarrow \ [0,\infty[\,, \ x \longmapsto \frac{1}{1-x} - 1.$$

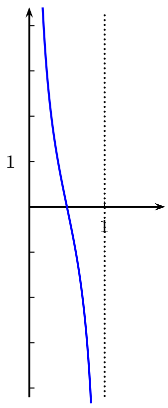


3. The statement is wrong. Suppose that $f : [0,1] \to [0,1[$ is a continuous surjection. Then $\varphi \circ f$, where φ is the from the preceding proof, is a continuous surjection from $[0,1]$ onto $[0,\infty[$. Contradiction to the first question. ↯
Alternative proof : Suppose that $f : [0,1] \to [0,1[$ is continuous. Then it takes its maximum value M. Since $M \in [0,1[$ we also have $(M+1)/2 \in [0,1[$. But f can't take the value $(M+1)/2$ since it is greater than M, and therefore f is not surjective. ↯

4. The statement is true. $[0,1[\to]0,1]\,, \ x \longmapsto 1-x$.

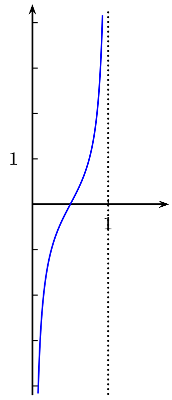
5. The statement is true.

$$]0,1[\ \longrightarrow \ \mathbb{R}\,, \ x \longmapsto \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1}.$$



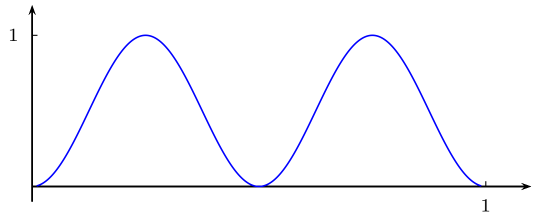
Another example is

$$]0,1[\ \longrightarrow \ \mathbb{R}\,, \ x \longmapsto \tan(\pi x - \frac{\pi}{2}).$$



6. The statement is true. An example is

$$]0,1[\ \longrightarrow \ [0,1]\,, \ x \longmapsto \sin(2\pi x)^2\,.$$



Still another solution can be found by the following ansatz : We look for a polynomial function f of third degree whose values grow to 1 then decrease to 0 and then grow again. We start with $f'(x) = 3x(x-4)$. Clearly $f(x) = x^3 - 6x^2$ has a maximum in 0 and a minimum in 4. Moreover

$$f(-1) = -7, \quad f(0) = 0, \quad f(4) = -32, \quad f(5) = -25.$$

Therefore the following function is surjective.

$$]0,1[\ \longrightarrow \ [0,1]\,, \ x \longmapsto \frac{f(6x-1)}{32} + 1\,.$$

All these examples are differentiable (in fact analytic) functions. A more simple example of a continuous function is the piece-wise affine function which links the points $(0,1/2)$, $(1/3,1)$, $(2/3,0)$ and $(1,1/2)$.

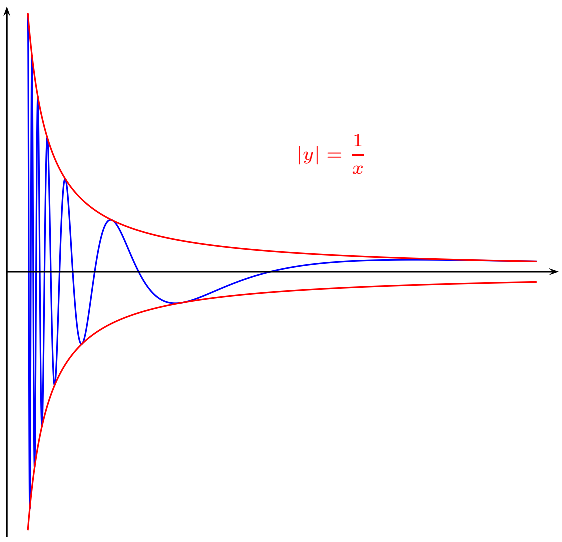
7. The statement is wrong. Suppose that $f :]0,1[\to [0,1]$ is a continuous bijection. Since f is surjective there exists $b \in]0,1[$ such that $f(b) = 1$. Let $a \in]0,b[$ and $c \in]b,1[$. Since $f(b) = 1$ is the maximum value of f and since f is injective we get $f(a) < 1$ and $f(c) < 1$. Let $y \in]f(a),1[\cap]f(c),1[$. By the intermediate value theorem we get

$$\exists x_1 \in]a,b[\ : \ f(x_1) = y \ \text{ and } \ \exists x_2 \in]b,c[\ : \ f(x_2) = y.$$

This is a contradiction to the injectivity of f. ↯

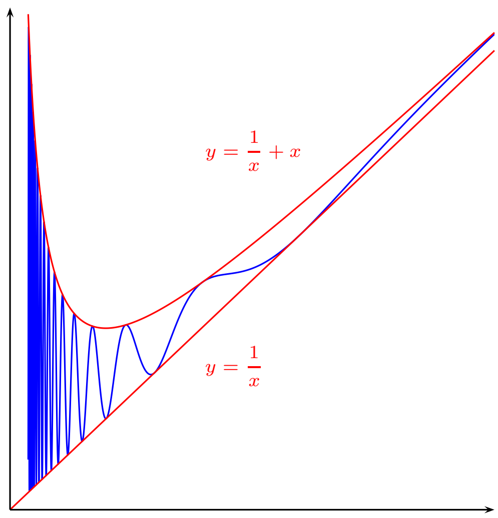
8. The statement is true.

$$]0,1] \ \longrightarrow \ \mathbb{R}\,, \ x \longmapsto \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}\,.$$



9. The statement is true.

$$]0,1] \longrightarrow]0,\infty[\,, \quad x \longmapsto \frac{1}{x}\left(\sin\frac{1}{x}\right)^2 + x\,.$$



Solution 2.

La fonction $h = g - f$ est continue sur le segment $[a,b]$ donc est bornée et atteint ses bornes. En particulier, il existe $c \in [a,b]$ tel que

$$\forall x \in [a,b], \quad h(x) \geqslant h(c) > 0.$$

En posant $m = h(c)$, on obtient le résultat demandé.

Solution 3.

Considérons la fonction définie par

$$h_\lambda(x) = f(x) - \lambda g(x).$$

La fonction h_λ est continue (différence de fonctions continues) et elle change de signe sur l'intervalle $[0,1]$:

$$h_\lambda(0) = -\lambda \leqslant 0, \quad h_\lambda(1) = 1.$$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $x_\lambda \in [0,1]$ tel que $h_\lambda(x_\lambda) = 0$, donc tel que

$$f(x_\lambda) = \lambda g(x_\lambda).$$

Solution 4.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Puisque T est une période on a

$$f(x) = f((x-T)+T) = f(x-T).$$

Cela prouve que $-T$ est une période.
Puisque T' et T sont des périodes on a

$$f(x+T+T') = f(x+T) = f(x).$$

Cela prouve que $T+T'$ est une période.

2. Soit $t = \inf G_+$. Il existe une suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de G_+ telle que $\lim_{n\to\infty} t_n = t$. Il y a deux cas à distinguer.

- $t > 0$. Grâce à la continuité de f on a

$$f(x+t) = \lim_{n\to\infty} f(x+t_n) = \lim_{n\to\infty} f(x) = f(x)\,.$$

Cela prouve que t est une période ; donc t est le minimum de G_+.

- $t = 0$. Comme f n'est pas constante il existe $y \in \mathbb{R}$ tel que $f(y) \neq f(0)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $f(\mathbb{R}) = f([0,t_n[)$; donc il existe $x_n \in [0,t_n[$ avec $f(x_n) = f(y)$. Puisque $\lim t_n = 0$ on a $\lim x_n = 0$. Ainsi par continuité

$$f(0) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} f(y) = f(y).$$

Contradiction $\lightning$ Le cas $t = 0$ est donc impossible.

Montrons que $G_+ = t\mathbb{N}^*$. L'inclusion $\supset$ est immédiate d'après la première question. Pour montrer l'inclusion réciproque supposons par l'absurde qu'il existe une période $T \in G_+ \backslash t\mathbb{N}^*$. Donc T est dans un intervalle de la forme $]kt,(k+1)t[$ pour un certain $k \in \mathbb{N}$. Alors $0 < T - kt < t$. Or $T - kt$ est une période (d'après la première question), strictement positive et plus petite que t. $\lightning$
On a montré que $G_+ = t\mathbb{N}^*$. Or dans la première question on a vu que G est symétrique par rapport à zéro, d'où $G = t\mathbb{Z}$. Autrement dit, toute période est un multiple de la période minimale.

3. Oui. La fonction caractéristique de $\mathbb{Q}$ (qui vaut 1 sur $\mathbb{Q}$ et 0 ailleurs) admet tout rationnel non nul comme période. Il n'existe pas de plus petite période pour cette fonction périodique.

Remarque – *En résumé, les périodes d'une fonction continue non-constante forment un sous-groupe discret de $\mathbb{R}$ ayant comme générateur la période minimale (qui est unique à signe près).*

Solution 5.

Méthode 1 : Notons f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par

$$x \mapsto xe^{1/x}.$$

Cette fonction est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et d'après le théorème des accroissements finis, pour tout $x > 0$, il existe $u_x \in]x, x+1[$ tel que

$$f(x+1) - f(x) = f'(u_x) = e^{1/u_x}\left(1 - \frac{1}{u_x}\right),$$

puisque $u_x > x$,

$$\lim_{x\to+\infty} u_x = +\infty,$$

et d'après la continuité de l'exponentielle,

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x+1) - f(x)] = 1.$$

Méthode 2 : On fait des développements limités lorsque $x \to \infty$.

$$xe^{\frac{1}{x}} \sim x + 1 + \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right),$$
$$(x+1)^{\frac{1}{x+1}} \sim (x+1) + 1 + \frac{1}{2(x+1)} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

Donc par soustraction on trouve que la limité de la différence est 1.

Solution 6.

1. Soit n le degré de P et $a_1 < a_1 < \ldots < a_n$ les racines de P. Pour tout $k = 1, \ldots, n-1$ il existe, d'après le théorème de Rolle, un $b_k \in [a_k, a_{k+1}]$ tel que $P'(b_k) = 0$. Comme les racines de P sont simples, P' ne s'anulle pas en a_k donc en fait b_k est dans l'intervalle ouvert $]a_k, a_{k+1}[$. Ainsi $b_1, \ldots, b_{n-1}$ sont des racines distinctes de P' et comme le degré de P' est $n-1$, ce sont toutes les racines de P'. On conclût que toutes les racines de P' sont réelles et simples.

2. Soit c une racine de $Q = P^2 + \alpha$. Il faut montrer que $Q'(c) \neq 0$. On a certainement $c \notin \mathbb{R}$ car

$$\forall x \in \mathbb{R} \;:\; Q(x) = P(x)^2 + \alpha > 0.$$

En particulier P et P' ne s'anullent pas en c. Ainsi

$$Q'(c) = 2P(c)P'(c) \neq 0,$$

ce qui montre que la racine c de Q est simple.