Exercice 1.

Proposition. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors $\lim_{t\to\infty}(f(t+1)-f(t)) = 0 \Rightarrow \lim_{t\to\infty} f(t)/t = 0$.

1. Démontrer cette proposition.
2. Reste-t-elle valable avec $\lim_{t\to\infty}(f(t+2)-f(t)) = 0$?
3. La réciproque de la proposition est-elle valable ?
4. Soit $f : (\mathbb{R}_+^*, \times) \longrightarrow (\mathbb{R}, +)$ un homomorphisme continu de groupes. Montrer que
$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0} x f(x) = 0\,.$$
Conséquence : Puisque le logarithme est continu et transforme les produits en sommes on a
$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ell\mathrm{n}(x)}{x} = \lim_{x\to 0} x\,\ell\mathrm{n}(x) = 0\,.$$
5. Généraliser : Pour toute fonction continue f on a
$$\lim_{t\to\infty}(f(t+1)-f(t)) = \ell \in \mathbb{R} \quad\Rightarrow\quad \lim_{t\to\infty}\frac{f(t)}{t} = \ell\,.$$

Exercice 2.

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = u_{n+1}/u_n$ et $w_n = (u_n)^{1/n}$. On suppose $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente de limite ℓ. Montrer que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente de limite ℓ.

Exercice 3.

On pose $u_n = \dfrac{1!+2!+\cdots+n!}{(n+1)!}$.

1. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$ on a l'encadrement suivant :
$$\frac{1}{n+1} \leqslant u_n \leqslant \frac{2n-1}{n(n+1)}\,.$$
En déduire que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.
2. En déduire la limite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = \dfrac{1!+2!+\ldots+n!}{n!}$.

Exercice 4.

On pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{2n}\frac{n-\sin k}{n^2+k}$ pour $n \geqslant 1$. Etudier la convergence $(u_n)_{n\geqslant 1}$.

Exercice 5.

Dans la séquence
$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$$
on supprime le premier terme, on garde celui qui suit, puis on supprime les deux termes suivants et on garde celui qui suit, puis on supprime les trois termes suivants et on garde celui qui suit, etc. On note $(u_n)_{n\geqslant 1}$ la suite ainsi obtenue.

1. Exprimer u_n en fonction de $n \geqslant 1$.
2. Prouver la convergence et calculer la limite de la suite de terme général
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k.$$

Exercice 6.

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites définies par $(a_0, b_0) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ et
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{a_n}{a_n^2+b_n^2} \\[2ex] b_{n+1} = \dfrac{b_n}{a_n^2+b_n^2} \end{cases}$$
On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$z_n = a_n + ib_n.$$

1. Que dire des suites $(z_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$?
2. Qu'en conclure concernant les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Exercice 7.

Soient p et q deux réels strictement positifs tels que $p+q = 1$ et $p > q$. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de réels telles que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} = pu_n + qv_n \\ v_{n+1} = pv_n + qu_n \end{cases}$$

1. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.
2. Calculer la limite commune de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. Solutions

Solution 1.

1. Soit $\epsilon > 0$ donné. Alors
$$\exists\, N \in \mathbb{N}\ \forall\, t \geqslant N\,, \quad |f(t+1) - f(t)| < \epsilon\,.$$
Puisque $t - \lfloor t - N \rfloor \in [N, N+1]$, on a pour tout $t \geqslant N$
$$\begin{aligned}\left|\frac{f(t)}{t}\right| &= \frac{1}{t}\left|\sum_{k=1}^{\lfloor t-N \rfloor} \big(f(t-k+1) - f(t-k)\big) + f(t - \lfloor t-N \rfloor)\right| \\ &\leqslant \frac{1}{t}\left(\sum_{k=1}^{\lfloor t-N \rfloor} \big|f(t-k+1) - f(t-k)\big| + \big|f(t - \lfloor t-N \rfloor)\big|\right) \qquad \text{on pose } M = \max_{N \leqslant x \leqslant N+1} |f(x)| \\ &\leqslant \frac{1}{t}\left(\lfloor t-N \rfloor \epsilon + M\right) \leqslant \epsilon + \frac{M}{t}.\end{aligned}$$
En choisissant $N' > N$ tel que $M/N' < \epsilon$ on a $|f(t)/t| < 2\epsilon$ pour tout $t > N'$.

2. Oui. Soit $a > 0$; la proposition reste valable avec l'hypothèse $\lim\limits_{t\to\infty} (f(t+a) - f(t)) = 0$. Pour le prouver on pose $g(t) = f(at)$ pour tout $t \geqslant 0$, de sorte que
$$\lim_{t\to\infty} (g(t+1) - g(t)) = \lim_{t\to\infty} (f(at+a) - f(at)) = \lim_{x\to\infty} (f(x+a) - f(x)) = 0\,.$$
On applique donc la proposition à la fonction g et on trouve
$$\lim_{t\to\infty} \frac{f(t)}{t} = \lim_{t\to\infty} \frac{g(t/a)}{t} = \frac{1}{a} \lim_{x\to\infty} \frac{g(x)}{x} = 0\,.$$

3. Non. Considérer par exemple $f(t) = \cos(\pi t)$.

4. Par continuité
$$\lim_{x\to\infty} (f(x+1) - f(x)) = \lim_{x\to\infty} f\left(\frac{x+1}{x}\right) = f\left(\lim_{x\to\infty} \frac{x+1}{x}\right) = f(1) = 0\,.$$
La proposition implique
$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 0\,.$$
Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ on a $f(1/x) = -f(x)$, d'où
$$\lim_{x\to 0} x f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} f\Big(\frac{1}{x}\Big) = -\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 0\,.$$

5. Soit $\epsilon > 0$ donné. Alors
$$\exists\, N \in \mathbb{N}\ \forall\, t \geqslant N\,, \quad |f(t+1) - f(t) - \ell| < \epsilon\,.$$
En suivant la preuve de la première question et sa définition de M on a, quelque soit $t \geqslant N$,
$$\begin{aligned}\left|\frac{f(t)}{t} - \ell\right| = \left|\frac{f(t) - t\ell}{t}\right| &= \frac{1}{t}\left|\sum_{k=1}^{\lfloor t-N \rfloor} \big(f(t-k+1) - f(t-k) - \ell\big) + f(t - \lfloor t-N \rfloor) - (t - \lfloor t-N \rfloor)\ell\right| \\ &\leqslant \epsilon + \frac{M + (N+1)\ell}{t}.\end{aligned}$$
En choisissant $N' > N$ tel que $(M + (N+1)\ell)/N' < \epsilon$ on a $|f(t)/t - \ell| < 2\epsilon$ quelque soit $t > N'$.

Solution 2.

Supposons $\ell > 0$. Pour $0 < \epsilon < \ell$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N$, alors

$$\ell - \epsilon < \frac{u_{n+1}}{u_n} < \ell + \epsilon.$$

L'identité suivante pour $n \geqslant N$

$$\frac{u_n}{u_N} = \frac{u_{N+1}}{u_N} \cdots \frac{u_n}{u_{n-1}}$$

entraîne que

$$(\ell - \epsilon)^{n-N} < u_n/u_N < (\ell + \epsilon)^{n-N}.$$

On en déduit que

$$u_N^{1/n}(\ell - \epsilon)^{1-N/n} < u_n^{1/n} < u_N^{1/n}(\ell + \epsilon)^{1-N/n}.$$

Comme $u_N^{1/n}(\ell - \epsilon)^{1-N/n}$ (resp. $u_N^{1/n}(\ell + \epsilon)^{1-N/n}$) tend vers $\ell - \epsilon$ (resp. $\ell + \epsilon$), alors il existe un entier $N' \geqslant N$ tel que pour tout $n \geqslant N'$ on a

$$\ell - 2\epsilon < u_N^{1/n}(\ell - \epsilon)^{1-N/n}$$
$$u_N^{1/n}(\ell + \epsilon)^{1-N/n} < \ell + 2\epsilon.$$

Nous avons donc, pour tout $n \geqslant N'$,

$$\ell - 2\epsilon < w_n < \ell + 2\epsilon$$

ce qui montre que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est converge vers ℓ.
Si $\ell = 0$, on voit facilement que $0 < u_n/u_N < \epsilon^{n-N}$ pour tout $n \geqslant N$. Le fait que $u_N^{1/n}\epsilon^{1-N/n}$ tend vers ϵ permet de conclure que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente de limite ℓ.

Solution 3.

1. Dans le numérateur, on met à part le dernier terme ($n!$), et on utilise que pour tout $n \geqslant 1$, on a l'encadrement :

$$0 \leqslant 1! + 2! + \cdots + (n-1)! \leqslant (n-1)! + (n-1)! + \cdots + (n-1)! = (n-1)(n-1)!\ ,$$

(pour le cas limite $n = 1$, c'est juste $0 \leqslant 0 \leqslant 0$...). On en déduit :

$$\frac{n!}{(n+1)!} \leqslant u_n \leqslant \frac{(n-1)(n-1)! + n!}{(n+1)!}\ ,$$

ce qui donne l'encadrement voulu pour tout $n \geqslant 1$.
Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2n-1}{n(n+1)} = 0$, on déduit du théorème d'encadrement que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

2. On a $v_{n+1} = u_n + 1$, donc d'après ce qui précède $\lim\limits_{n\to+\infty} v_{n+1} = 1$, et donc aussi $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 1$.

Solution 4.

On a pour tout $n \geqslant 1$:

$$2n\frac{n-1}{n^2+2n} \leqslant u_n \leqslant 2n\frac{n+1}{n^2+1}\ ,$$

d'où par encadrement $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$.

Solution 5.

1. Le nombre u_n est de la forme $u_n = 1/\alpha_n$ avec $\alpha_n \in \mathbb{N}$ vérifiant $\forall n \geqslant 1$,

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n + n + 2.$$

On a donc

$$\alpha_n - \alpha_1 = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\alpha_{k+1} - \alpha_k\right) = \sum_{k=1}^{n-1} \left(k+2\right)$$
$$= 2(n-1) + \frac{n(n-1)}{2}$$

ainsi,

$$\alpha_n = \frac{n(n+3)}{2}.$$

2. On a $\forall n \geqslant 1$,

$$\frac{2}{k(k+3)} = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+3}\right).$$

On a donc

$$S_n = \frac{2}{3}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \frac{2}{3}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+3} = \frac{2}{3}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \frac{2}{3}\sum_{k=4}^{n+3}\frac{1}{k}$$
$$= \frac{2}{3}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3}\right)$$

ainsi

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{11}{9}.$$

Solution 6.

1. On a pour tout $n \geqslant 0$,

$$z_{n+1} = \frac{z_n}{|z_n|^2} = \frac{1}{\overline{z_n}}.$$

On a donc, pour tout $n \geqslant 0$,

$$z_{2n+2} = \frac{1}{\dfrac{1}{\overline{\overline{z_{2n}}}}} = z_{2n},$$

ainsi $(z_{2n})_{n\geqslant 0}$ est constante, et puisque

$$z_{2n+1} = \frac{1}{\overline{z_{2n}}},$$

la suite $(z_{2n+1})_{n\geqslant 0}$ est constante.

2. On en déduit immédiatement que les suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(b_n)_{n\geqslant 0}$ sont 2-périodiques.

Solution 7.

1. Posons $\beta_n = u_n - v_n$ pour tout $n \geqslant 0$. On a alors $\forall n \geqslant 0$,

$$\beta_{n+1} = (p-q)\beta_n,$$

c'est-à-dire la suite $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $p-q$. Puisque $p+q=1$ et $0<q<p$, on a $0<p-q<1$ et donc la suite $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de signe constant est de limite nulle. Il reste à prouver que les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones de sens de variation contraires. On calcule

$$u_{n+1} - u_n = (p-1)u_n + qv_n = -qu_n + qv_n = -q\beta_n,$$
$$v_{n+1} - v_n = (p-1)v_n + qu_n = -qv_n + qu_n = q\beta_n.$$

Cela montre que le signe de $u_{n+1} - u_n$ ne dépend pas de n, d'où la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. De même pour $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En plus les deux suites sont de sens de variation contraires car les différences $u_{n+1} - u_n =$ et $v_{n+1} - v_n$ sont de signes opposés.

2. On remarque que la suite de terme général

$$\alpha_n = u_n + v_n$$

est constante. Si on note ℓ la limite commune des deux suites, on a donc par passage à la limite

$$2\ell = u_0 + v_0$$

d'où

$$\ell = \frac{u_0 + v_0}{2}.$$