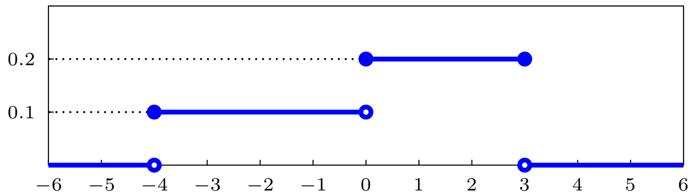
Exercice	1	2	3	4	5
Barème	5	4	4	3	4
Note					

Vous répondrez directement sur cette feuille d'énoncé. L'épreuve comporte cinq exercices dont un en forme de QCM. Pour chaque question du QCM exactement une des trois réponses proposées est juste, vous devez simplement cocher la case correspondante sans justifier. Barème pour le QCM :

0 *point si vous laissez les trois cases vides.*
1 *point si vous cochez la bonne case.*
$-\frac{1}{2}$ *point si vous cochez une mauvaise case ou si vous cochez plus d'une case ou si votre choix est illisible.*
Un éventuel résultat négatif à l'exercice QCM est pris en compte pour le calcul de la note finale.

Exercice 1 — *QCM*

1. Soit X une variable aléatoire continue dont la fonction de densité est représentée ci-dessous.



Alors la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}(X > 0 \mid X < 1)$ est égale à

☐ $\frac{1}{3}$ ☐ 0.1 ☐ aucune des deux réponses.

2. On choisit au hasard trois personnes dans un groupe constitué de 17 femmes et 12 hommes. La probabilité que ces trois personnes ne soient pas tous de même sexe est environ

☐ 0.67 ☐ 0.33 ☐ $\frac{3}{4}$.

3. Combien de fois faut-il lancer un dé équilibré pour être sûr à $80\,\%$ d'obtenir au moins un six ?

☐ 6 fois ☐ 8 fois ☐ 9 fois.

4. Après une épreuve écrite l'enseignant cherche la copie d'un certain étudiant dans le paquet de 40 copies. Puisqu'elles ne sont pas ordonnées, il regarde une copie après l'autre en commençant par le dessus du paquet. La probabilité qu'il doive regarder au delà des 10 premières copies est égale à

☐ 0.75 ☐ 0.776 ☐ aucune des deux réponses.

5. Soit X une variable aléatoire de fonction de densité symétrique par rapport à l'axe d'équation $x = a$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$

☐ $\mathbb{P}(X > a + x) = \mathbb{P}(X > a - x)$
☐ $\mathbb{P}(X > a + x) = 1 - \mathbb{P}(X < a - x)$
☐ $\mathbb{P}(X < a + x) = 1 - \mathbb{P}(X < a - x)$.

Exercice 2 —

Un gérant de supermarché a analysé les achats de 518 clients. Il a compté le nombre de packs de lait achetés par chaque client et a obtenu le tableau suivant :

Nombre de clients	112	168	130	69	32	5	1	1
Nombre k de packs de lait	0	1	2	3	4	5	6	7
$\mathbb{P}(X = k)$								

1. On choisit au hasard l'un des clients analysés. On désigne par X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de packs de lait qu'il a achetés.

1.a. Remplir dans le tableau les probabilités $\mathbb{P}(X = k)$, $k \in [\![0, 7]\!]$ (arrondir à 10^{-4}).

1.b. Calculer l'espérance $\mathbb{E}(X)$ et la variance $\mathbb{V}(X)$.

2. Le gérant propose de modéliser X par une variable aléatoire Y qui suit la loi de Poisson de paramètre 1.55. Calculer, pour chaque $k \in [\![0, 7]\!]$, la probabilité $\mathbb{P}(Y = k)$; puis $518 \times \mathbb{P}(Y = k)$, c'est-à-dire le nombre de « clients hypothétiques qui devraient acheter k packs de lait ». La modélisation vous semble-t-elle bonne ?

Exercice 3 —

Un certain type de composant électronique ne s'use pas, c'est-à-dire sa durée de vie est « sans mémoire ». Son espérance de vie est de cinq cents heures.

1. On démarre le composant à l'instant $t = 0$.

1.a. Quelle est la probabilité qu'il tombe en panne avant l'instant $t = 100$ heures ?

1.b. On suppose que le composant fonctionne encore à $t = 100$ heures. Quelle est la probabilité qu'il fonctionne encore à $t = 200$ heures ?

2. Trois de ces composants sont intégrés dans une machine ; ils fonctionnent de manière indépendante.

2.a. Calculer la probabilité qu'aucun des trois composants ne tombe en panne avant l'instant $t = 100$ heures.

2.b. Calculer la probabilité qu'exactement deux composants tombent en panne avant l'instant $t = 100$ heures.

Exercice 4 —

On a observé que la vitesse V (en km/h) des automobilistes sur un axe principal d'une grande ville suit une loi normale d'espérance 61 et de variance 121.

1. Quelle est la probabilité que la vitesse d'un automobiliste soit

1.a. supérieure à 61 km/h ?

1.b. inférieure à 55.5 km/h ?

1.c. comprise entre 50 et 72 km/h ?

2. En prévision d'un contrôle radar, quelle doit être la vitesse maximale tolérée afin de ne pas verbaliser plus de 15 % des conducteurs ?

Exercice 5 —

Un QCM est constitué de n questions indépendantes. Pour chacune sont proposées deux réponses dont une seule est juste. Un certain candidat qui n'a pas révisé décide de cocher au hasard ; on note X le nombre de ses bonnes réponses.

1. Quelle est la loi de X ?

2. Le QCM comporte 40 questions. Avec quelle probabilité le candidat obtient-il au moins $60\,\%$ de bonnes réponses ? (Utiliser une approximation de loi.)

3. Même question avec un QCM comportant 80 questions.

4. Le jury de l'épreuve souhaite qu'un candidat cochant au hasard n'ait pas plus de $2\,\%$ de chances d'obtenir au moins $60\,\%$ de bonnes réponses. Combien de questions le QCM doit-il comporter ?

Table numérique pour la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$

Fonction de répartition : $$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t.$$

Exemple :

$\Phi(1.32) \approx 0.90658$ $\qquad$ $\Phi(-1.32) = 1 - \Phi(1.32) \approx 0.09342$

	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	50000	50399	50798	51197	51595	51994	52392	52790	53188	53586
0.1	53983	54380	54776	55172	55567	55962	56356	56749	57142	57535
0.2	57926	58317	58706	59095	59483	59871	60257	60642	61026	61409
0.3	61791	62172	62552	62930	63307	63683	64058	64431	64803	65173
0.4	65542	65910	66276	66640	67003	67364	67724	68082	68439	68793
0.5	69146	69497	69847	70194	70540	70884	71226	71566	71904	72240
0.6	72575	72907	73237	73565	73891	74215	74537	74857	75175	75490
0.7	75804	76115	76424	76730	77035	77337	77637	77935	78230	78524
0.8	78814	79103	79389	79673	79955	80234	80511	80785	81057	81327
0.9	81594	81859	82121	82381	82639	82894	83147	83398	83646	83891
1.0	84134	84375	84614	84849	85083	85314	85543	85769	85993	86214
1.1	86433	86650	86864	87076	87286	87493	87698	87900	88100	88298
1.2	88493	88686	88877	89065	89251	89435	89617	89796	89973	90147
1.3	90320	90490	90658	90824	90988	91149	91309	91466	91621	91774
1.4	91924	92073	92220	92364	92507	92647	92785	92922	93056	93189
1.5	93319	93448	93574	93699	93822	93943	94062	94179	94295	94408
1.6	94520	94630	94738	94845	94950	95053	95154	95254	95352	95449
1.7	95543	95637	95728	95818	95907	95994	96080	96164	96246	96327
1.8	96407	96485	96562	96638	96712	96784	96856	96926	96995	97062
1.9	97128	97193	97257	97320	97381	97441	97500	97558	97615	97670
2.0	97725	97778	97831	97882	97932	97982	98030	98077	98124	98169
2.1	98214	98257	98300	98341	98382	98422	98461	98500	98537	98574
2.2	98610	98645	98679	98713	98745	98778	98809	98840	98870	98899
2.3	98928	98956	98983	99010	99036	99061	99086	99111	99134	99158
2.4	99180	99202	99224	99245	99266	99286	99305	99324	99343	99361
2.5	99379	99396	99413	99430	99446	99461	99477	99492	99506	99520
2.6	99534	99547	99560	99573	99585	99598	99609	99621	99632	99643
2.7	99653	99664	99674	99683	99693	99702	99711	99720	99728	99736
2.8	99744	99752	99760	99767	99774	99781	99788	99795	99801	99807
2.9	99813	99819	99825	99831	99836	99841	99846	99851	99856	99861
3.0	99865	99869	99874	99878	99882	99886	99889	99893	99896	99900
3.1	99903	99906	99910	99913	99916	99918	99921	99924	99926	99929
3.2	99931	99934	99936	99938	99940	99942	99944	99946	99948	99950
3.3	99952	99953	99955	99957	99958	99960	99961	99962	99964	99965
3.4	99966	99968	99969	99970	99971	99972	99973	99974	99975	99976
3.5	99977	99978	99978	99979	99980	99981	99981	99982	99983	99983
3.6	99984	99985	99985	99986	99986	99987	99987	99988	99988	99989
3.7	99999	99999	99999	99999	99999	99999	99999	99999	99999	99999
3.8	99999	99999	99999	99999	99999	99999	99999	99999	99999	99999
3.9	100000	100000	100000	100000	100000	100000	100000	100000	100000	100000

Corrigé de l'exercice 1 — *QCM*

1. Réponse A. $\mathbb{P}(X > 0 \mid X < 1) = \dfrac{\mathbb{P}(0 < X < 1)}{\mathbb{P}(X < 1)} = \dfrac{0.2}{0.6} = \dfrac{1}{3}$.

2. Réponse C. Le nombre de choix possibles est $\binom{29}{3} = 3654$. On peut choisir deux hommes et une femme de $\binom{12}{2}\binom{17}{1} = 1122$ manières ; et deux femmes et un homme de $\binom{17}{2}\binom{12}{1} = 1632$ manières. La probabilité est donc $(1122 + 1632)/3654 \approx 0.75$
De manière équivalente on peut passer par l'événement contraire : le nombre de possibilités de choisir seulement des femmes est $\binom{17}{3} = 680$; et de choisir seulement des hommes $\binom{12}{3} = 220$. La probabilité recherchée est donc $1 - (680 + 220)/3654 \approx 0.75$

3. Réponse C. On souhaite que la probabilité de ne pas faire de six soit inférieure à 20 %. Le nombre k de lancers doit donc vérifier $\left(\frac{5}{6}\right)^k < 0.2$. On trouve $k > 8.8$.

4. Réponse A. En fait, on a une situation de équirépartition et la probabilité que la copie cherchée se trouve parmi les dernières trente est $30/40$. Voici une autre approche, plus tordue : La probabilité pour que la première copie ne soit pas la bonne est $\frac{39}{40}$, ensuite pour la deuxième c'est $\frac{38}{39}$, et ainsi de suite. Par conséquent la probabilité recherchée est le produit de dix facteurs $\frac{39}{40} \times \frac{38}{39} \times \cdots \times \frac{31}{32} \times \frac{30}{31}$. Par simplification, cela se réduit à $\frac{30}{40}$.

5. Réponse C.

Corrigé de l'exercice 2 —

On calcule les fractions $\frac{112}{518} \approx 0.2162$ etc.

Nombre de clients	112	168	130	69	32	5	1	1
Nombre k de packs de lait	0	1	2	3	4	5	6	7
$\mathbb{P}(X = k)$	0.2162	0.3243	0.2510	0.1332	0.0618	0.0097	0.0019	0.0019

La moyenne des packs achetés est $\mathbb{E}(X) = \frac{801}{518} \approx 1.546$ et la variance est $\mathbb{V}(X) \approx 1.53$. Ainsi la moyenne coïncide quasiment avec la variance ; comme cela est caractéristique pour la loi de Poisson, on peut tenter d'approximer X par Y avec $\mathbb{P}(Y = k) = e^{-1.55}\frac{1.55^k}{k!}$. On trouve

k	0	1	2	3	4	5	6	7
$\mathbb{P}(Y = k)$	0.212	0.329	0.255	0.132	0.051	0.0158	0.00409	0.0009
$518 \times \mathbb{P}(Y = k)$	109	170	132	68	26	8	2	0

En comparant avec le tableau de l'énoncé on trouve que la modélisation de X par Y est de bonne qualité.

Corrigé de l'exercice 3 —

1. La durée de vie (en heures) du composant est une variable aléatoire T qui suit la loi exponentielle $\mathcal{E}(0.002)$.

1.a. La probabilité que le composant tombe en panne entre les temps 0 et 100 vaut

$$\mathbb{P}(T \leqslant 100) = 1 - e^{-0.002\times 100} = 1 - e^{-0.2} \approx 0.181.$$

1.b. Il s'agit de calculer la probabilité de $\{T > 200\}$ sachant que $\{T > 100\}$. Comme il y a absence de mémoire on a

$$\mathbb{P}(T > 200 \mid T > 100) = \mathbb{P}(T > 100) = e^{-0.2} \approx 0.819.$$

2. Notons X le nombre de composants qui tombent en panne entre les temps 0 et 100. Donc $X \sim \mathcal{B}(3, 1 - e^{-0.2})$.

2.a. $\mathbb{P}(X = 0) = \left(e^{-0.2}\right)^3 = e^{-0.6} \approx 55\,\%$.

2.b. $\mathbb{P}(X = 2) = \binom{3}{2}(1 - e^{-0.2})^2 e^{-0.2} \approx 8\,\%$.

Corrigé de l'exercice 4 —

1. 1.a. Sans aucun calcul on trouve $\mathbb{P}(V > 61) = 0.5$.

1.b. $\mathbb{P}(V < 55.5) = P\left(\frac{V-61}{11} < -\frac{5.5}{11}\right) = 1 - \mathbb{P}(V^* < 0.5) \approx 1 - 0.69146 = 0.30854$.

1.c. Si on se rappelle de l'intervalle de confiance $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$ on a immédiatement $\mathbb{P}(50 < V < 72) \approx 0.68$. Sinon on retrouve ce résultat grâce à la table.

2. On cherche la plus petite vitesse v_0 telle que $\mathbb{P}(V > v_0) \leqslant 0.1$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(V > v_0) \leqslant 0.15 &\iff \mathbb{P}(V < v_0) > 0.85\\ &\iff \mathbb{P}\left(\frac{V-61}{11} < \frac{v_0 - 61}{11}\right) > 0.85\\ &\iff \frac{v_0-61}{11} \geqslant 1.04 \iff v_0 \geqslant 72.44\end{aligned}$$

La vitesse maximale tolérée afin de ne pas verbaliser plus de 15 % des conducteurs est d'environ 72 km/h.

Corrigé de l'exercice 5 —

1. La variable X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, 0.5)$ d'espérance $0.5n$ et de variance $0.25n$. On peut l'approcher par la loi normale $\mathcal{N}(0.5n, 0.25n)$ lorsque les conditions $n \geqslant 30$, $np \geqslant 5$, $nq \geqslant 5$ sont satisfaites.

2. X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(40, 0.5)$ et donc approximativement la loi normale $\mathcal{N}(20, 10)$. Ainsi on obtient

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \geqslant 24) &= \mathbb{P}\left(X^* \geqslant \frac{24-20}{\sqrt{10}}\right)\\ &= 1 - \Phi(1.26) \approx 0.10383.\end{aligned}$$

3. Avec l'approximation par la loi normale $\mathcal{N}(40, 20)$,

$$\mathbb{P}(X \geqslant 48) = 1 - \Phi(1.79) \approx 0.03673.$$

4. On cherche n tel $\mathbb{P}(X < 0.6n) \geqslant 0.98$ où X suit la loi $\mathcal{N}(0.5n, 0.25n)$.

$$\mathbb{P}(X < 0.6n) = \mathbb{P}\left(X^* < \frac{0.6n - 0.5n}{\sqrt{0.25n}}\right) = \Phi(0.2\sqrt{n}).$$

Par lecture inversée de la table de la loi centrée réduite on trouve que $\Phi(0.2\sqrt{n}) \geqslant 0.98$ revient à $0.2\sqrt{n} \geqslant 2.05$, c'est-à-dire il faut poser au moins 106 questions.