Nom :	Exercice	1	2	3	4
Prénom :	Barème	5	5	5	5
Groupe de TD :	Note				

Vous répondrez directement sur cette feuille d'énoncé. L'épreuve comporte quatre exercices dont un en forme de QCM. Pour chaque question du QCM exactement une des trois réponses proposées est juste, vous devez simplement cocher la case correspondante sans justifier. Barème pour le QCM :

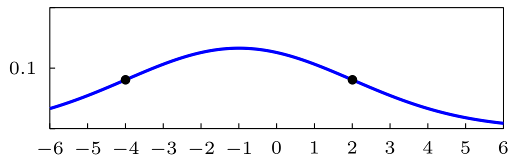
0 *point si vous laissez les trois cases vides.*
1 *point si vous cochez la bonne case.*
$-\frac{1}{2}$ *point si vous cochez une mauvaise case ou si vous cochez plus d'une case ou si votre choix est illisible.*
Un éventuel résultat négatif à l'exercice QCM est pris en compte pour le calcul de la note finale.

Exercice 1 — *QCM*

1. Soient X et Y des variables aléatoires liées par la relation $Y = 2X + 3$. Alors
- ☐ $\mathbb{V}(Y) = 4\,\mathbb{V}(X) + 3$
- ☐ $\mathbb{V}(Y) = 2\,\mathbb{V}(X)$
- ☐ $\mathbb{V}(X) = 0.25\,\mathbb{V}(Y)$

2. Dans ma boîte email arrivent en moyenne 3 publicités par jour. On note A (respectivement B) l'événement « je reçois trois publicités en un jour » (resp. « je reçois six publicités en deux jours »).
- ☐ $\mathbb{P}(A) < \mathbb{P}(B)$
- ☐ $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B)$
- ☐ $\mathbb{P}(A) > \mathbb{P}(B)$.

3. Ci-dessus la fonction de densité d'une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Deux points d'inflexion sont représentés.



Il s'agit de la loi
- ☐ $\mathcal{N}(-1, 3)$
- ☐ $\mathcal{N}(-1, 1)$
- ☐ $\mathcal{N}(-1, 9)$.

4. On a deux pièces de monnaie, l'une est équilibrée et l'autre tombe sur « face » trois fois sur quatre. On en choisit une au hasard, on la lance et on obtient « face ». La probabilité qu'il s'agisse de la pièce pipée est égale à
- ☐ $60\,\%$
- ☐ $75\,\%$
- ☐ aucun des deux résultats précédents.

5. On dispose de deux urnes. L'une contient trois boules blanches et deux noires, l'autre quatre blanches et trois noires. On prélève une boule de chaque urne. La probabilité d'obtenir des boules de couleurs différentes est environ
- ☐ plus grande que $50\,\%$
- ☐ égale à $50\,\%$
- ☐ plus petite que $50\,\%$.

Exercice 2 —

En une heure soixante-douze personnes se rendent, en moyenne, aux toilettes du bâtiment d'Alembert.

1. Vérifier que la probabilité qu'aucune personne ne se rende aux toilettes entre 16h et 16h03 est approximativement égale à 3 %.

2. Calculer la probabilité qu'au moins quatre personnes se rendent aux toilettes entre 16h et 16h05.

3. Si en une minute plus de deux personnes se rendent aux toilettes, une queue d'attente se forme.

3.a. Calculer la probabilité qu'une queue se forme entre 16h et 16h01.

3.b. Grâce à un modèle au choix, que vous expliquerez, calculer la probabilité qu'une queue se forme au moins deux fois entre 16h et 16h30.

Exercice 3 —

Un appareil consiste de n composants électroniques indépendants qui ne s'usent pas. Chaque composant a une durée de vie moyenne de 1000 jours.

1. Quelle est la loi de la durée de vie de chaque composant ?

2. On suppose que $n = 6$. Quelle est la probabilité qu'exactement deux composants fonctionnent jusqu'à l'instant $t = 1500$ jours ?

3. On suppose que $n = 2$ et que le fonctionnement de chaque composant est nécessaire au fonctionnement de l'appareil. Selon quelle loi évolue la durée de vie de l'appareil ?

Exercice 4 —

Un fromage comté est coupé, puis emballé et vendu en grandes quantités aux rayons d'hypermarchés. Le poids net d'une unité suit la loi normale de moyenne $500\,\mathrm{g}$ et d'écart-type $20\,\mathrm{g}$.

1. Quel est le pourcentage des unités dont le poids net dépasse $520\,\mathrm{g}$?

2. Le poids de l'emballage suit également une loi normale, avec moyenne de $50\,\mathrm{g}$. On a trouvé que $90\,\%$ des emballages pèsent plus que $45\,\mathrm{g}$. Déduire de ces données que l'écart-type de cette distribution est environ $3.9\,\mathrm{g}$.

3. Le poids brut est la somme du poids net et de l'emballage. Puisque l'emballage et le fromage sont fabriqués par des producteurs distincts, leurs poids sont indépendants. Sur vingt mille unités combien auront un poids brut entre 540 et $560\,\mathrm{g}$?

Table numérique pour la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$

Fonction de répartition : $$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t.$$

Exemple :

$\Phi(1.32) \approx 0.90658$ $\Phi(-1.32) = 1 - \Phi(1.32) \approx 0.09342$

	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	50000	50399	50798	51197	51595	51994	52392	52790	53188	53586
0.1	53983	54380	54776	55172	55567	55962	56356	56749	57142	57535
0.2	57926	58317	58706	59095	59483	59871	60257	60642	61026	61409
0.3	61791	62172	62552	62930	63307	63683	64058	64431	64803	65173
0.4	65542	65910	66276	66640	67003	67364	67724	68082	68439	68793
0.5	69146	69497	69847	70194	70540	70884	71226	71566	71904	72240
0.6	72575	72907	73237	73565	73891	74215	74537	74857	75175	75490
0.7	75804	76115	76424	76730	77035	77337	77637	77935	78230	78524
0.8	78814	79103	79389	79673	79955	80234	80511	80785	81057	81327
0.9	81594	81859	82121	82381	82639	82894	83147	83398	83646	83891
1.0	84134	84375	84614	84849	85083	85314	85543	85769	85993	86214
1.1	86433	86650	86864	87076	87286	87493	87698	87900	88100	88298
1.2	88493	88686	88877	89065	89251	89435	89617	89796	89973	90147
1.3	90320	90490	90658	90824	90988	91149	91309	91466	91621	91774
1.4	91924	92073	92220	92364	92507	92647	92785	92922	93056	93189
1.5	93319	93448	93574	93699	93822	93943	94062	94179	94295	94408
1.6	94520	94630	94738	94845	94950	95053	95154	95254	95352	95449
1.7	95543	95637	95728	95818	95907	95994	96080	96164	96246	96327
1.8	96407	96485	96562	96638	96712	96784	96856	96926	96995	97062
1.9	97128	97193	97257	97320	97381	97441	97500	97558	97615	97670
2.0	97725	97778	97831	97882	97932	97982	98030	98077	98124	98169
2.1	98214	98257	98300	98341	98382	98422	98461	98500	98537	98574
2.2	98610	98645	98679	98713	98745	98778	98809	98840	98870	98899
2.3	98928	98956	98983	99010	99036	99061	99086	99111	99134	99158
2.4	99180	99202	99224	99245	99266	99286	99305	99324	99343	99361
2.5	99379	99396	99413	99430	99446	99461	99477	99492	99506	99520
2.6	99534	99547	99560	99573	99585	99598	99609	99621	99632	99643
2.7	99653	99664	99674	99683	99693	99702	99711	99720	99728	99736
2.8	99744	99752	99760	99767	99774	99781	99788	99795	99801	99807
2.9	99813	99819	99825	99831	99836	99841	99846	99851	99856	99861
3.0	99865	99869	99874	99878	99882	99886	99889	99893	99896	99900
3.1	99903	99906	99910	99913	99916	99918	99921	99924	99926	99929
3.2	99931	99934	99936	99938	99940	99942	99944	99946	99948	99950
3.3	99952	99953	99955	99957	99958	99960	99961	99962	99964	99965
3.4	99966	99968	99969	99970	99971	99972	99973	99974	99975	99976
3.5	99977	99978	99978	99979	99980	99981	99981	99982	99983	99983
3.6	99984	99985	99985	99986	99986	99987	99987	99988	99988	99989
3.7	99999	99999	99999	99999	99999	99999	99999	99999	99999	99999
3.8	99999	99999	99999	99999	99999	99999	99999	99999	99999	99999
3.9	100000	100000	100000	100000	100000	100000	100000	100000	100000	100000

Corrigé de l'exercice 1 — *QCM*

1. Réponse C car on a $\mathbb{V}(Y) = \mathbb{V}(2X+3) = 2^2\,\mathbb{V}(X)$.

2. Réponse C. Loi de Poisson : $\mathbb{P}(A) = e^{-3}\frac{3^3}{3!} \approx 22\,\%$ et $\mathbb{P}(B) = e^{-6}\frac{6^6}{6!} \approx 16\,\%$.

3. Réponse C. On sait, d'après le cours, que les points d'inflexion sont en $\mu \pm \sigma$. Donc $\mu = -1$ et $\sigma = 3$. La variance est égale à 9.

4. Réponse A. On note F pour « face » et S pour la pièce faussée. Avec la formule de Bayes

$$\mathbb{P}(S|F) = \frac{\mathbb{P}(F|S)\mathbb{P}(S)}{\mathbb{P}(F|S)\mathbb{P}(S) + \mathbb{P}(F|\overline{S})\mathbb{P}(\overline{S})} = \frac{\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}} = \frac{3}{5}.$$

5. Réponse C. On calcule $\frac{3}{5}\times\frac{3}{7}+\frac{2}{5}\times\frac{4}{7} = \frac{17}{35}$.

Corrigé de l'exercice 2 —

1. Soit X le nombre de personnes se rendant aux toilettes entre 16h et 16h03. La variable X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = \frac{72}{60}\times 3 = 3.6$. Alors

$$\mathbb{P}(X=0) = e^{-3.6} \approx 2.7\,\%\,.$$

2. Soit Y le nombre de personnes se rendant aux toilettes entre 16h et 16h05. La variable Y suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = \frac{72}{60}\times 5 = 6$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y \geqslant 4) &= 1 - \mathbb{P}(Y \leqslant 3)\\ &= 1 - e^{-6}\,(1+6+18+36)\\ &= 1 - 61\times e^{-6} \approx 0.85.\end{aligned}$$

3. Soit Z le nombre de personnes se rendant aux toilettes entre 16h et 16h01. Alors $Z \sim \mathcal{P}(1.2)$

3.a. La la probabilité p qu'une queue se forme entre 16h et 16h01 est

$$\begin{aligned}p = \mathbb{P}(Z > 2) &= 1 - \mathbb{P}(Z \leqslant 2)\\ &= 1 - e^{-1.2}\left(1 + 1.2 + \frac{1.2^2}{2}\right) \approx 0.12.\end{aligned}$$

3.b. Soit U, le nombre de queues se formant entre 16h et 16h30. En moyenne 0.12 queues se forment par minute, ou encore 3.6 par demi-heure. Donc $U \sim \mathcal{P}(3.6)$ et

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(U \geqslant 2) &= 1 - \mathbb{P}(U \leqslant 1)\\ &= 1 - e^{-3.6}(1+3.6) \approx 0.87.\end{aligned}$$

Solution alternative : En supposant la formation des queues indépendantes toutes les minutes, la variable aléatoire U suit une loi binomiale de paramètre $n = 30$ et $p = 0.12$. Alors

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(U \geqslant 2) &= 1 - \mathbb{P}(U \leqslant 1)\\ &= 1 - (1-p)^{30} - 30p(1-p)^{29} \approx 0.89.\end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 3 —

1. La durée de vie (en jours) de chaque composant est une variable aléatoire T_k qui suit la loi exponentielle $\mathcal{E}(0.001)$.

2. Pour chaque composant la probabilité qu'il fonctionne après 1500 jours est égale à

$$\mathbb{P}(T_k > 1500) = e^{-0.001\times 1500} = e^{-1.5}.$$

Notons X le nombre de composants qui fonctionnent après 1500 jours. Donc $X \sim \mathcal{B}(6, e^{-1.5})$. Ainsi

$$\mathbb{P}(X=2) = \binom{6}{2}(e^{-1.5})^2(1-e^{-1.5})^4 \approx 27.2\,\%.$$

3. Notons T_1 (resp. T_2) la durée de vie du premier (resp. second) composant. Alors la durée de vie de l'appareil est $T = \min(T_1, T_2)$. On a pour tout temps $t \in \mathbb{R}_+$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T > t) &= \mathbb{P}(\{T_1 > t\} \cap \{T_2 > t\}) = \mathbb{P}(T_1 > t)\mathbb{P}(T_2 > t)\\ &= e^{-0.001t}e^{-0.001t} = e^{-0.002t}.\end{aligned}$$

Ainsi T suit la loi exponentielle de paramètre 0.002. La durée de vie moyenne de l'appareil est de 500 h.

Corrigé de l'exercice 4 —

Notons X le poids net et Y le poids de l'emballage (en grammes). On a $X \sim \mathcal{N}(500, 20^2)$ et $Y \sim \mathcal{N}(50, \sigma^2)$.

1. Le pourcentage est environ 16 % car

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X > 520) &= \mathbb{P}\left(\frac{X-500}{20} > \frac{520-500}{20}\right)\\ &= \mathbb{P}\left(X^* > 1\right) = 1 - \Phi(1) \approx 0.15866.\end{aligned}$$

Si on se rappelle de la première plage de normalité, à savoir 68 %, on trouve ce résultat de tête car c'est la moitié du complément.

2. D'après l'information de l'énoncé

$$0.9 = \mathbb{P}(Y > 45) = \mathbb{P}(Y < 55) = \mathbb{P}\left(Y^* < \frac{5}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{5}{\sigma}\right).$$

Par conséquent on trouve $\frac{5}{\sigma} \approx 1.28$ ou encore $\sigma \approx 3.9$.

3. Le poids brut est $Z = X + Y$ qui suit la loi normale $\mathcal{N}(550, 20^2 + 3.9^2)$ dont l'écart type est 20.3767. Ainsi

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(540 < Z < 560) &= 2\,\mathbb{P}(550 < Z < 560)\\ &\approx 2\,\mathbb{P}(0 < Z^* < 0.49)\\ &= 2(\Phi(0.49) - 0.5) \approx 37.6\,\%.\end{aligned}$$

Cela fait environ 7520 unités sur mille.