Nom :	Exercice	1	2	3	4
Prénom :	Barème	5	4	5	6
Groupe de TD :	Note				

Vous répondrez directement sur cette feuille d'énoncé. L'épreuve comporte quatre exercices dont un en forme de QCM. Pour chaque question du QCM exactement une des trois réponses proposées est juste, vous devez simplement cocher la case correspondante sans justifier. Barème pour le QCM :

0 *point si vous laissez les trois cases vides.*
1 *point si vous cochez la bonne case.*
$-\frac{1}{2}$ *point si vous cochez une mauvaise case ou si vous cochez plus d'une case ou si votre choix est illisible.*
Un éventuel résultat négatif à l'exercice QCM est pris en compte pour le calcul de la note finale.

Exercice 1 — *QCM*

1. Si $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\overline{B}) = 0.4$ et $\mathbb{P}(A \cup B) = 0.7$ alors

☐ $\mathbb{P}(A \cap B) = 0.3$

☐ $\mathbb{P}(A \cap B) = 0$

☐ On ne peut rien déduire.

2. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. L'implication $x > 1 \implies n \leqslant 3$ est équivalente à

☐ $n \leqslant 3 \implies x > 1$

☐ $n \geqslant 3 \implies x < 1$

☐ $n \geqslant 4 \implies x \leqslant 1.$

3. Pour sortir Évelyne choisit entre deux paires de chaussures (noires ou bleues), entre trois chemises (blanche, rouge ou bleue), entre quatre sacs à main (noir, marron, rouge ou bleu) et entre deux lunettes de soleil (rouges ou bleu). Combien de possibilités a-t-elle, sachant qu'elle prend le sac à main de couleur rouge si et seulement si elle porte les solaires rouges ?

☐ 24

☐ 42

☐ Aucune des deux réponses précédentes.

4. La somme $0.1 + 0.13 + 0.16 + 0.19 + \cdots + 100$ est égale à

☐ 166716.55

☐ 16666.65

☐ $5005.65.$

5. Pour le premier jour du G7 (composé de sept pays) le protocole prévoit que les chefs d'état se serrent les mains. Combien de serre-mains ont lieu ?

☐ 49

☐ 42

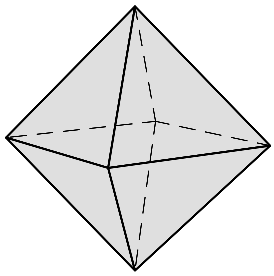
☐ 21.

Exercice 2 —

Une maison est équipée d'une alarme. On sait qu'en cas d'effraction, l'alarme fonctionne avec une probabilité de $99\,\%$, et qu'elle se déclenche avec une probabilité de $0.5\,\%$ lorsqu'il n'y a pas d'effraction. On estime à $10\,\%$ la probabilité d'une effraction.
L'alarme se déclenche. Quelle est la probabilité que ce soit une fausse alerte ?

Exercice 3 —

On considère un octaèdre régulier et équilibré dont les huit faces portent les numéros 1 à 8.



1. On le lance cinq fois. Quelle est la probabilité d'obtenir

1.a. au moins une fois la face 1 ?

1.b. au plus une fois la face 1 ?

2. Quel est le nombre minimal de lancers nécessaires pour obtenir avec au moins $95\,\%$ de chances au moins une fois la face 1 ?

Exercice 4 —

Dans cet exercice on donnera toutes les probabilités arrondi au millième.

On dispose d'une urne contenant 30 boules, dont 10 sont de couleur noire (N). On tire successivement une boule et on note sa couleur.

1. On procède à 5 tirages sans remise. Déterminer la probabilité de

1.a. A : « Exactement deux boules tirées sont noires ».

1.b. B : « On tire la suite $\overline{N}N\overline{N}N\overline{N}$ ».

2. On procède à 5 tirages avec remise. Déterminer la probabilité de

2.a. C : « Exactement deux boules tirées sont noires ».

2.b. D : « On tire la suite $\overline{N}N\overline{N}N\overline{N}$ ».

3. Les tirages sont avec remise. Déterminer la probabilité de

3.a. E : « Il faut attendre cinq tirages pour obtenir une première fois une boule noire ».

3.b. F : « Il faut attendre dix tirages pour obtenir une troisième fois une boule noire ».

Corrigé de l'exercice 1 — *QCM*

1. Réponse A. $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cup B) = 0.4 + (1 - 0.4) - 0.7 = 0.3$.

2. Réponse C. L'implication $x > 1 \implies n \leqslant 3$ est équivalente à sa contreposée $n \not\leqslant 3 \implies x \not> 1$.

3. Réponse A. Si elle prend le sac à main rouge le nombre de possibilités est (dans l'ordre de l'énoncé) $2 \times 3 \times 1 \times 1$. Si elle ne le prend pas le nombre de possibilités est $2 \times 3 \times 3 \times 1$. Au total ce sont 24 possibilités.

4. Réponse A. Il s'agit des termes d'une suite arithmétique $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de premier terme $a_0 = 0.1$ et de raison 0.03, c'est-à-dire $a_k = 0.1 + 0.03k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. On résout $0.1+0.03n = 100$ et on trouve $n = 3330$, d'où $a_{3330} = 100$. Donc il y a 3331 termes dans la somme, d'où sa valeur 166716.55 d'après la formule

(nombre de termes) $\times$ (premier + dernier termes)/2.

5. Réponse C. $\binom{7}{2} = \frac{7\times 6}{1\times 2} = 7 \times 3 = 21$.

Corrigé de l'exercice 2 —

Notant E pour effraction et A pour alarme on a $\mathbb{P}(E) = 0.1$, $\mathbb{P}(A|E) = 0.99$ et $\mathbb{P}(A|\overline{E}) = 0.005$.

Par la formule de Bayes on trouve

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\overline{E}|A) &= \frac{\mathbb{P}(A|\overline{E})\mathbb{P}(\overline{E})}{\mathbb{P}(A|\overline{E})\mathbb{P}(\overline{E}) + \mathbb{P}(A|E)\mathbb{P}(E)} \\ &= \frac{0.005 \times 0.9}{0.005 \times 0.9 + 0.99 \times 0.1} \approx 4.3\,\%\end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 3 —

Soit n le nombre de lancers et X le nombre de faces 1 obtenues. Alors $X \sim \mathcal{B}(n, \frac{1}{8})$.

1. Ici $n = 5$, donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \geqslant 1) &= 1 - \mathbb{P}(X = 0) = 1 - \left(\frac{7}{8}\right)^5 \approx 49\,\%\,, \\ \mathbb{P}(X \leqslant 1) &= \mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1) \\ &= \left(\frac{7}{8}\right)^5 + \binom{5}{1}\frac{1}{8}\left(\frac{7}{8}\right)^4 \approx 88\,\%\,.\end{aligned}$$

2. Ici le nombre de lancers n n'est pas donné.

$$\mathbb{P}(X \geqslant 1) = 1 - \mathbb{P}(X = 0) = 1 - \left(\frac{7}{8}\right)^n.$$

On cherche le plus petit $n \in \mathbb{N}$ tel que $1 - (7/8)^n \geqslant 0.95$. Cela équivaut à $(7/8)^n \leqslant 0.05$ ou encore à $n\,\ell\mathrm{n}(7/8) \leqslant \ell\mathrm{n}(0.05)$. On trouve que $n \geqslant \ell\mathrm{n}(0.05)/\ell\mathrm{n}(7/8) \approx 22.4$ (l'inégalité change de sens après division par le nombre négatif $\ell\mathrm{n}(7/8)$). Par conséquent $n = 23$ est l'entier recherché.

Corrigé de l'exercice 4 —

Notons X le nombre de tirages effectués.

1. Le nombre X de boules noires suit la loi hypergéométrique $\mathcal{H}(5, 30, 10)$. On trouve

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(X = 2) = \frac{\binom{10}{2}\binom{20}{3}}{\binom{30}{5}} \approx 36.0\,\%\,.$$

Pour un ordre particulier on trouve

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(\overline{N}N\overline{N}N\overline{N}) = \frac{20}{30}\frac{10}{29}\frac{19}{28}\frac{9}{27}\frac{18}{26} \approx 3.6\,\%\,.$$

On remarque que $\mathbb{P}(A) = 10\,\mathbb{P}(B)$. Ce n'est pas une surprise car la série $\overline{N}N\overline{N}N\overline{N}$ est l'une des $\binom{5}{2}$ réalisations de A (on choisit deux emplacements parmi cinq où mettre les N, ce qui fait $\binom{5}{2} = 10$ possibilités).

2. Le nombre Y de boules noires suit la loi binomiale $\mathcal{B}(5, \frac{1}{3})$. On trouve

$$\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(Y = 2) = \binom{5}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^3 \approx 32.9\,\%\,.$$

Pour un ordre particulier on trouve

$$\mathbb{P}(D) = \mathbb{P}(\overline{N}N\overline{N}N\overline{N}) = \frac{2}{3}\frac{1}{3}\frac{2}{3}\frac{1}{3}\frac{2}{3} \approx 3.3\,\%\,.$$

On peut aussi obtenir ce résultat en remarquant qu'on doit avoir $\mathbb{P}(C) = \binom{5}{2}\mathbb{P}(D) = 10\,\mathbb{P}(D)$.

3. Le nombre Z tirages nécessaires pour obtenir une boule noire suit la loi géométrique $\mathcal{G}(\frac{1}{3})$. On trouve

$$\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(Z = 5) = \left(\frac{2}{3}\right)^4 \frac{1}{3} \approx 6.6\,\%\,.$$

Le nombre U tirages nécessaires pour obtenir trois boules noires suit la loi binomiale négative $\mathcal{BN}(3, \frac{1}{3})$. On trouve

$$\mathbb{P}(F) = \mathbb{P}(U = 10) = \binom{9}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^7 \left(\frac{1}{3}\right)^3 \approx 7.8\,\%\,.$$