Licence deuxième année 2016-2017

Contrôle Continu 1 – 22 Février 2017

Nom :

Prénom :

Groupe de TD :

Vous répondrez directement sur la feuille d'énoncé. L'épreuve comporte quatre exercices dont un en forme de QCM. Pour chaque question du QCM, exactement une des trois réponses proposées est juste. Vous devez simplement cocher la case correspondante sans justifier. Barême pour le QCM :

0 point si vous laissez les trois cases vides

1 point si vous cochez la bonne réponse

$-\frac{1}{2}$ *point si vous cochez une mauvaise case ou si vous cochez plus d'une case ou si votre choix est illisible.*

Un éventuel résultat négatif à l'exercice QCM est pris en compte pour le calcul de la note finale.

Bon courage !

Exercice 1 QCM – sujet 1 (5 points)

1– Quelle est la négation de la phrase « Toutes les boules contenues dans l'urne sont blanches » ?

☐ Aucune boule de l'urne n'est blanche.

☐ Toutes les boules ont des couleurs autres que blanche.

☐ Au moins une boule de l'urne n'est pas blanche.

2– Lors du nouvel an, cent soixante personnes trinquent chacun avec chacun. Combien de fois les verres résonnent-ils ?

☐ 12720

☐ 25440

☐ 25600

3– Un digicode de la porte d'entrée d'un immeuble est une série de 4 caractères choisis parmi 4 lettres et 10 chiffres. Combien peut-on former de codes à caractères distincts contenant exactement 3 chiffres ?

☐ 2880

☐ 11520

☐ 16000

4– On dispose d'une urne remplie de 10 boules blanches et 10 boules noires. On procède à 6 tirages sans remise. La probabilité d'obtenir exactement 3 boules blanches est environ égale à

☐ 16%

☐ 37%

☐ 50%

5– Soit $\mathbb{P}$ une loi de probabilité sur l'univers Ω, et $A, B \subset \Omega$ deux événements incompatibles de probabilités non nulles. Alors

☐ $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$

☐ $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)$

☐ Les 2 affirmations précédentes sont fausses.

Solution :

1– Réponse C.

2– Réponse A. Il s'agit de trouver le nombre de groupes de deux personnes qu'on peut choisir parmi cent soixante. La réponse est $\binom{160}{2} = 12720$.

3– Réponse B. Il y a $10\times9\times8\times4$ codes à caractères distincts de la forme « chiffre-chiffre-chiffre-lettre ». Pour chaque tel code, il y a 4 places possibles pour la lettre. La réponse est donc $4\times(10\times9\times8\times4) = 11520$.

4– Réponse B.

Première solution : La probabilité de tirer la suite « $BBBNNN$ » est égale à

$$\frac{(10\times 9\times 8)^2}{20\times 19\times 18\times 17\times 16\times 15}.$$

Ensuite il y a 3 emplacements parmi 6 pour placer les boules blanches, soit $\binom{6}{3}$. La réponse cherchée est donc

$$\binom{6}{3}\times\frac{(10\times 9\times 8)^2}{20\times 19\times 18\times 17\times 16\times 15}\approx 37\%$$

Deuxième solution : Soit X le nombre de boules blanches tirées. Alors X suit la loi hypergéométrique $\mathcal{H}(6, 20, 10)$. On cherche alors

$$\mathbb{P}(X=3)=\frac{\binom{10}{3}\binom{10}{3}}{\binom{30}{6}}\approx 37\%$$

5– Réponse A. A et B incompatibles signifie que $A\cap B=\varnothing$. Ainsi $\mathbb{P}(A\cap B)=0$ et donc $\mathbb{P}(A\cup B)=\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)$.

Exercice 2 QCM –sujet 2 (5 points)

1– Un digicode de la porte d'entrée d'un immeuble est une série de 4 caractères choisis parmi 5 lettres et 9 chiffres. Combien peut-on former de codes à caractères distincts contenant exactement 3 chiffres ?

- ☐ 10080
- ☐ 14580
- ☐ 2520

2– Soit $\mathbb{P}$ une loi de probabilité sur l'univers Ω, et $A, B \subset \Omega$ deux événements indépendants de probabilités non nulles. Alors

- ☐ $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$
- ☐ $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)$
- ☐ Les 2 affirmations précédentes sont fausses.

3– Lors du nouvel an, cent cinquante personnes trinquent chacun avec chacun. Combien de fois les verres résonnent-ils ?

- ☐ 22500
- ☐ 22350
- ☐ 11175

4– Quelle est la négation de la phrase « Toutes les boules contenues dans l'urne sont rouges » ?

- ☐ Aucune boule de l'urne n'est rouge.
- ☐ Au moins 1 boule de l'urne n'est pas rouge.
- ☐ Toutes les boules ont des couleurs autres que rouge.

5– On dispose d'une urne remplie de 20 boules blanches et 20 boules noires. On procède à 8 tirages sans remise. La probabilité d'obtenir exactement 4 boules blanches est environ égale à

- ☐ 31%
- ☐ 50%
- ☐ 14%

Solution :

1– Réponse A. Il y a $9\times8\times7\times5$ codes à caractères distincts de la forme « chiffre-chiffre-chiffre-lettre ». Pour chaque tel code, il y a 4 places possibles pour la lettre. La réponse est donc $4\times(9\times8\times7\times5) = 10080$.

2– Réponse B.

3– Réponse C. Il s'agit de trouver le nombre de groupes de deux personnes qu'on peut choisir parmi cent cinquante. La réponse est $\binom{150}{2} = 11175$.

4– Réponse B.

5– Réponse A.

<u>Première solution</u> : La probabilité de tirer la suite « $BBBBNNNN$ » est égale à

$$\frac{(20\times19\times18\times17)^2}{40\times39\times38\times37\times36\times35\times34\times33}.$$

Ensuite il y a 4 emplacements parmi 8 pour placer les boules blanches, soit $\binom{8}{4}$. La réponse cherchée est donc

$$\binom{8}{4}\times\frac{(20\times19\times18\times17)^2}{40\times39\times38\times37\times36\times35\times34\times33} \approx 31\%$$

<u>Deuxième solution</u> : Soit X le nombre de boules blanches tirées. Alors X suit la loi hypergéométrique $\mathcal{H}(8, 40, 20)$. On cherche alors

$$\mathbb{P}(X = 3) = \frac{\binom{20}{4}\binom{20}{4}}{\binom{40}{8}} \approx 31\%$$

Exercice 3 (5 points)

Un groupe de TD compte 35 élèves dont 21 filles. A chaque cours de mathématiques, le professeur interroge au hasard un élève de la classe sans se rappeler quels élèves il a déjà interrogés. On note X le nombre de filles interrogées sur 10 cours consécutifs.

1– Quelle est la loi de X ?

2– Montrer que la probabilité qu'il y ait exactement 5 filles interrogées est approximativement égale à 20.1% ?

3– Calculer la probabilité qu'au plus 2 filles soient interrogées.

4– Quelle doit-être le nombre minimal de cours consécutifs pour que la probabilité qu'au moins 1 fille soit interrogée soit supérieure à 99.9% ?

Solution :

1– $X \sim \mathcal{B}(10, 0.6)$

2– $\mathbb{P}(X = 5) = \binom{10}{5} 0.6^5\, 0.4^5 \approx 20.1\%$

3– $\mathbb{P}(X \leqslant 2) = \sum_{k=0}^{2} \binom{10}{k} 0.6^k\, 0.4^{10-k} \approx 1.2\%$

4– Cette fois, $X \sim \mathcal{B}(n, 0.6)$ et on cherche n minimal tel quel $\mathbb{P}(X \geqslant 1) \geqslant 0.999$ ce qui est équivalent à $\mathbb{P}(X = 0) \leqslant 0.001$ soit $n \geqslant \frac{\ln(0.001)}{\ln(0.4)} \approx 7.5$. Il faut donc au minimum avoir 8 cours consécutifs.

Exercice 4 (5 points)

Un joueur joue à un jeu de hasard où la chance de gagner est de 8% à chaque fois. Il décide de rejouer à chaque fois qu'il perd et de s'arrêter la première fois qu'il gagne. De plus, il a estimé que pour limiter ses pertes lorsqu'il gagnera, il mise 2 euros à la première partie puis augmente sa mise de 50% à chaque partie.

1– Calculer la probabilité qu'il gagne au bout de 9 parties.

2– Dans ce cas, combien aura-t-il misé au total ?

3– Calculer la probabilité qu'il perde au moins 10 parties.

Solution :

Soit X le nombre de parties jouées. Alors $X \sim \mathcal{G}(0.08)$.

1– $\mathbb{P}(X = 9) = 0.92^8\, 0.08 \approx 4.1\%$

2– $\sum_{k=0}^{8} 2 \times 1.5^k = 2 \times \frac{1-1.5^9}{1-1.5} \approx 149.8$ euros

3– $\mathbb{P}(X \geqslant 11) = 0.92^{10} \approx 43.4\%$

Exercice 5 (5 points)

Une maladie affecte un français sur mille. On dispose d'un test sanguin qui détecte cette maladie avec une fiabilité de 99% lorsqu'elle est effectivement présente. Cependant, on obtient un résultat faussement positif pour 0.2% des personnes saines testées. On note T l'événement « le test est positif » et M l'événement « la personne testée est malade ».

1– On choisit une personne. Son test est positif. Calculer la probabilité que la personne soit, en fait, saine.

2– On considère un deuxième test ayant les mêmes caractéristiques que le premier et on note S l'événement « le deuxième test est positif ». On suppose de plus que les deux tests sont indépendants conditionnellement au fait d'avoir ou non la maladie, c'est-à-dire

$$\mathbb{P}(T \cap S \mid M) = \mathbb{P}(T \mid M)\,\mathbb{P}(S \mid M) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(T \cap S \mid \overline{M}) = \mathbb{P}(T \mid \overline{M})\,\mathbb{P}(S \mid \overline{M})$$

Calculer $\mathbb{P}(\overline{M} \mid T \cap S)$.

Solution :

1– On cherche à calculer $\mathbb{P}(\overline{M} \mid T)$. Les données sont $\mathbb{P}(M) = 0.001$ donc $\mathbb{P}(\overline{M}) = 0.999$, $\mathbb{P}(T \mid M) = 0.99$ et $\mathbb{P}(T \mid \overline{M}) = 0.002$. D'après la formule de Bayes on trouve

$$\mathbb{P}(\overline{M} \mid T) = \frac{\mathbb{P}(T \mid \overline{M})\,\mathbb{P}(\overline{M})}{\mathbb{P}(T \mid \overline{M})\,\mathbb{P}(\overline{M}) + \mathbb{P}(T \mid M)\,\mathbb{P}(M)} = \frac{0.002 \times 0.999}{0.002 \times 0.999 + 0.99 \times 0.001} \approx 66.9\%$$

2– D'après la formule de Bayes,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\overline{M} \mid T \cap S) &= \frac{\mathbb{P}(T \cap S \mid \overline{M})\,\mathbb{P}(\overline{M})}{\mathbb{P}(T \cap S \mid \overline{M})\,\mathbb{P}(\overline{M}) + \mathbb{P}(T \cap S \mid M)\,\mathbb{P}(M)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(T \mid \overline{M})\,\mathbb{P}(S \mid \overline{M})\,\mathbb{P}(\overline{M})}{\mathbb{P}(T \mid \overline{M})\,\mathbb{P}(S \mid \overline{M})\,\mathbb{P}(\overline{M}) + \mathbb{P}(T \mid M)\,\mathbb{P}(S \mid M)\,\mathbb{P}(M)} \\
&= \frac{0.002^2 \times 0.999}{0.002^2 \times 0.999 + 0.99^2 \times 0.001} \\
&\approx 0.4\%
\end{aligned}$$