Exercice	1	2	3	4
Barème	4	7	4	5
Note				

Exercice 1.

Soit H et K des sous-groupes d'un groupe G. Montrer que HK est un sous-groupe de G si et seulement si $HK = KH$.

Exercice 2.

Soit $G = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$. On pose pour tous éléments (x, y) et (x', y') de G :

$$(x, y) * (x', y') = (xx', xy' + y)$$

1. Vérifier que $*$ est une loi interne associative sur G.
2. Vérifier que $(G, *)$ est un groupe. Est-il commutatif ?
3. Donner une expression de $(x, y)^n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 3.

1. Trouver deux sous-groupes de $\mathbb{R}$ dont la réunion n'est pas un sous-groupe de $\mathbb{R}$.
2. Existe-t-il deux sous-groupes de $\mathbb{R}^*$ dont la réunion n'est pas un sous-groupe de $\mathbb{R}^*$?
3. Soit G un groupe et $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite *croissante* de sous-groupes de G, c'est-à-dire telle que $H_n \subset H_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} H_n$ est un sous-groupe de G.

Exercice 4.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on note $\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$ le sous-groupe de $\mathbb{C}^*$ formé par les racines n-ièmes de l'unité.
On fixe un nombre premier p et on pose $G_p = \left\{z \in \mathbb{C} \,\middle|\, \exists\, k \in \mathbb{N},\ z^{p^k} = 1\right\}$.

1. Montrer que G_p est un sous-groupe de $\mathbb{C}^*$. Quel est le cardinal de G_p ?

2. Soit H un sous-groupe propre de G_p.

2.a. Montrer que $E_H = \{\mathrm{ord}(g) \mid g \in H\}$ est une partie finie de $\mathbb{N}$.

2.b. Déduire que H est cyclique.

3. Montrer que G_p ne possède pas de sous-groupe maximal.

4. Montrer que G_p n'est pas engendré par un système fini d'éléments.

Rappels : Soit G un groupe et H un sous-groupe de G. On dit que H est *propre* si $H \neq G$ et $H \neq \{e\}$. On dit que H est *maximal*s'il est propre et si pour tout sous-groupe propre H' de G l'inclusion $H \subset H'$ implique $H = H'$.

1. Solutions

Solution 1.

Supposons que $HK = KH$. Remarquons que HK contient l'élément neutre. Soient x, x' des éléments arbitraires de HK. Il existe $h, h' \in H$ et $k, k' \in K$ tels que $x = hk$ et $x = h'k'$. On a $x^{-1}x' = (hk)^{-1}h'k' = k^{-1}(h^{-1}h')k'$. Or, $k^{-1}(h^{-1}h')$ est dans KH qui est égal à HK. Donc il existe $h'' \in H$ et $k'' \in K$ tels que $k^{-1}(h^{-1}h') = h''k''$. Ainsi on a $x^{-1}x' = h''k''k' \in HK$. Cela prouve que HK est un sous-groupe de G.

Remarque – *En écriture ensembliste ça devient simplement :*

$$(HK)^{-1}(HK) = (K^{-1}H^{-1})(HK) = (KH)(HK) = (KH)K = (HK)K = HK.$$

Réciproquement, supposons que HK est un sous-groupe de G. Soient $h \in H$ et $k \in K$ deux éléments arbitraires. Alors $h \in HK$ et $k \in HK$ et donc $kh \in HK$. Cela prouve l'inclusion $KH \subset HK$. Pour montrer l'inclusion réciproque on remarque que $(hk)^{-1} \in HK$, donc il existe $h_1 \in H$ et $k_1 \in K$ tels que $(hk)^{-1} = h_1k_1$. Donc $hk = k_1^{-1}h_1^{-1} \in KH$.

Solution 2.

1. Soient (x, y) et (x', y') dans G. Comme $x, x' \in \mathbb{R}^*$, $xx' \in \mathbb{R}^*$ et il est évident que $xy' + y \in \mathbb{R}$. Donc $(x, y) * (x', y') \in G$.
Soient (x, y), (x', y') et (x'', y'') dans G. On voit facilement que :

$$\begin{aligned}\big((x,y) * (x',y')\big) * (x'',y'') &= (x,y) * \big((x',y') * (x'',y'')\big)\\ &= (xx'x'', xx'y'' + xy' + y)\end{aligned}$$

2. G possède un élément neutre à savoir $(1, 0)$. Soit $(x, y) \in G$ et cherchons $(x', y') \in G$ tel que $(x, y) * (x', y') = (1, 0)$. Ceci équivaut à résoudre

$$\begin{cases} xx' = 1 \\ xy' + y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x' = \dfrac{1}{x} \\ y' = -\dfrac{y}{x} \end{cases} \text{car } x \neq 0$$

Donc (x, y) admet pour inverse à droite $\left(\dfrac{1}{x}, -\dfrac{y}{x}\right)$. On vérifie facilement que c'est aussi l'inverse à gauche, donc l'inverse.
En conclusion, $(G, *)$ est bien un groupe. On voit qu'il n'est pas commutatif car $(1, 1) * (2, 2) = (2, 4)$ et $(2, 2) * (1, 1) = (2, 3)$.

3. A partir des premières valeurs de $n \in \mathbb{N}$, on conjecture $(x, y)^n = (x^n, y + yx + \cdots + yx^{n-1})$.
Initialisation : La formule est clairement vraie pour $n = 0$.
Hérédité : On suppose $(x, y)^n = (x^n, y+yx+\cdots+yx^{n-1})$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$\begin{aligned}(x,y)^{n+1} &= (x,y) * (x,y)^n\\ &= (x,y) * (x^n, y + yx + \cdots + yx^{n-1})\\ &= (x^{n+1}, y + yx + \cdots + yx^n),\end{aligned}$$

ce qui termine la preuve par récurrence.
En outre, en utilisant la somme des termes d'une suite géométrique, on a la formule suivante pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(x,y)^n = \begin{cases} \left(x^n,\ y\dfrac{1-x^n}{1-x}\right) & \text{si } x \neq 1 \\ (1, ny) & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Il reste à trouver une formule pour des exposants négatifs. Soit $n \in \mathbb{N}$. On calcule

$$\begin{aligned}(x,y)^{-n} &= ((x,y)^n)^{-1}\\ &= \begin{cases} \left(x^n,\ y\dfrac{1-x^n}{1-x}\right)^{-1} & \text{si } x \neq 1 \\ (1, ny)^{-1} & \text{si } x = 1 \end{cases}\\ &= \begin{cases} \left(x^{-n},\ -y\dfrac{1-x^n}{1-x} \times x^{-n}\right) & \text{si } x \neq 1 \\ (1, -ny) & \text{si } x = 1 \end{cases}\\ &= \begin{cases} \left(x^{-n},\ y\dfrac{1-x^{-n}}{1-x}\right) & \text{si } x \neq 1 \\ (1, -ny) & \text{si } x = 1 \end{cases}\end{aligned}$$

Donc la formulé établie pour $n \in \mathbb{N}$ reste valable sur $\mathbb{Z}$.

Remarque – *Cette structure de groupe sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ est une simple émulation du groupe des bijections affines de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$! En effet, la composée de $f : t \mapsto at + b$ et $g : t \mapsto a't + b'$ est $f \circ g : t \mapsto (aa')t + (ab' + b)$. On retrouve la loi de groupe sur les coefficients.*

Solution 3.

1. $2\mathbb{Z}$ et $3\mathbb{Z}$ sont des sous-groupes de $\mathbb{R}$ mais leur réunion $2\mathbb{Z}\cup 3\mathbb{Z}$ ne l'est pas ; en effet, 3 et 2 sont dans $2\mathbb{Z}\cup 3\mathbb{Z}$ mais $3-2$ ne l'est pas.

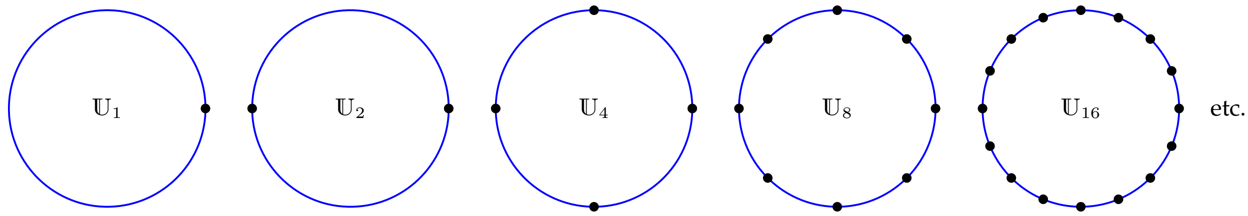
2. Oui, bien sûr ! En fait, $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ est un isomorphisme, donc $\exp(2\mathbb{Z})$ et $\exp(3\mathbb{Z})$ sont des sous-groupes de $\mathbb{R}_+^*$ (et donc aussi de $\mathbb{R}^*$) dont la réunion n'est pas un sous-groupe.

Autres exemples : $\mathbb{Q}^*$ et $\mathbb{R}_+^*$. Ou $\mathbb{Q}_+^*$ et $\{1,-1\}$. Ou $2^{\mathbb{Z}}$ et $3^{\mathbb{Z}}$.

3. Soient x et y dans $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} H_n$. Il existe $k,\ell \in \mathbb{N}$ tels que $x \in H_k$ et $y \in H_\ell$. À cause de la croissance de la suite de sous-groupes $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on a $x,y \in H_m$ avec $m = \max(k,\ell)$. Comme H_m est un groupe on a $xy^{-1} \in H_m$ et donc $xy^{-1} \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} H_n$.

Solution 4.

On a $\mathbb{U}_{p^k} \subset \mathbb{U}_{p^{k+1}}$ quelque soit $k \in \mathbb{N}$. Le groupe G_p est l'union $G_p = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{U}_{p^k}$. Par exemple, G_2 est l'union de s points suivants :



1. Donc G_p est un sous-groupe de $\mathbb{C}^*$ en tant qu'union de la suite croissante $\mathbb{U}_{p^k}$, $k \in \mathbb{N}$, de sous-groupes. En plus, la suite est strictement croissante, donc G_p est un groupe infini.

2. 2.a. On commence par remarquer que tout $g \in G_p$ est d'ordre fini de la forme p^ℓ avec ℓ dans $\mathbb{N}$. Donc E_H est bien une partie de $\mathbb{N}$.
Supposons par l'absurde que E_H contient une infinité d'éléments. Donc E_H est non bornée. Pour $k \in \mathbb{N}$ donné arbitrairement il existe $g \in G_p$ tel que $\operatorname{ord}(g) = p^\ell > p^k$. Ainsi $\mathbb{U}_{p^k} \subset \mathbb{U}_{p^\ell} = \langle g\rangle \subset H$. Comme cela est vrai pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $G_p \subset H$, en contradiction avec le fait que H est un sous-groupe propre de G_p.

2.b. En notant p^m le plus grand élément de l'ensemble fini E_H, on a donc $H \subset \mathbb{U}_{p^m}$. Ainsi H est cyclique en tant que sous-groupe du groupe cyclique $\mathbb{U}_{p^m}$.

3. Soit H un sous-groupe propre de G_p. Avec les notations précédentes $H \subset \mathbb{U}_{p^m} \subset \mathbb{U}_{p^{m+1}}$, la dernière inclusion étant stricte. Donc H est un sous-groupe propre de $\mathbb{U}_{p^{m+1}}$ qui, quant à lui, est un sous-groupe propre de G_p. Cela prouve que H n'est pas maximal pour l'inclusion.

4. Raisonnons par l'absurde en supposant que $G_p = \langle g_1,\dots,g_r\rangle$. Notons $p^m = \max(\operatorname{ord}(g_1),\dots,\operatorname{ord}(g_m))$. On a clairement $G_p = \langle g_1,\dots,g_r\rangle \subset \mathbb{U}_{p^m} \neq G_p$ ce qui est absurde.