Exercice 1.

Déterminer la nature et les caractéristiques des ensembles d'équation paramétrique ...

1. $\mathscr{C}_1 : x(t) = 4\cos(t) - 3\,,\ y(t) = 4\sin(t) + 2,\ t \in \mathbb{R}$.
2. $\mathscr{C}_2 : z(t) = \frac{1}{3} + 2e^{it}$, avec $t \in \mathbb{R}$.
3. $\mathscr{C}_3 : z(t) = -1 - 5e^{-3it}$, avec $t \in \mathbb{R}$.

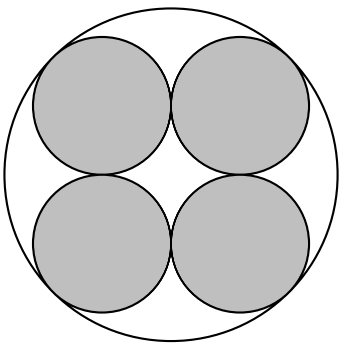
Exercice 2.

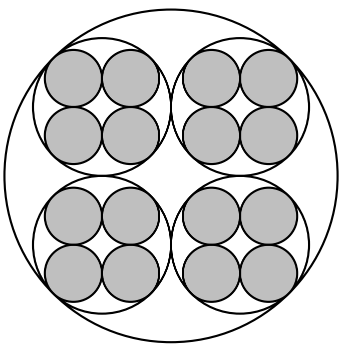
Déterminer la nature et les caractéristiques des ensembles d'équation cartésienne ...

1. $\mathscr{C}_1 : x^2 + y^2 - 4x - 6y + \lambda = 0$, où $\lambda \in \mathbb{R}$.
2. $\mathscr{C}_2 : x^2 + y^2 - 2\lambda x - 2\lambda y + \lambda^2 = 0$, où $\lambda \in \mathbb{R}$.
3. $\mathscr{C}_3 : x^2 + y^2 + \lambda x - 4\lambda y + 2\lambda^2 = 0$, où $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exercice 3.

Dans la première figure ci-dessous les quatres cercles hachurés ont même diamètre ; chacun est tangent à deux autres cercles hachurés ainsi qu'au grand cercle.
Dans la deuxième figure chacun des cercles hachurés précédents est remplacé par une configuration analogue.

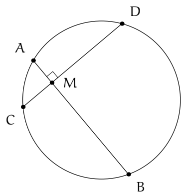




On note A_k l'aire hachurée de la k-ième figure, $k \in \{1, 2\}$. Calculer le rapport A_2/A_1.

Exercice 4.

Soient $\mathscr{C}$ un cercle de rayon $R > 0$, $[AB]$ et $[DC]$ deux cordes de $\mathscr{C}$ perpendiculaires en un point M.



Prouver que $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 4R^2$.

Exercice 5.

Déterminer un cercle tangent aux trois droites d'équations respectives :

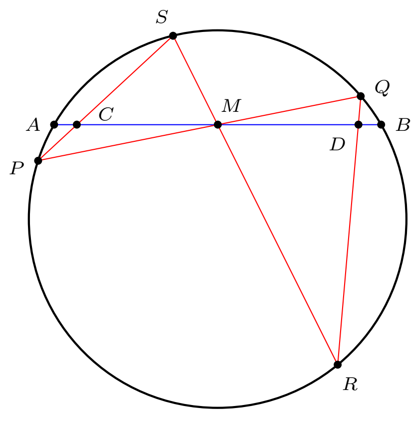
$$y = 2x + 1,\ \ y = -2x + 7 \ \text{ et } \ y = -\frac{1}{2}x.$$

Exercice 6.

1. Soient $\mathscr{C}$ un cercle et O un point à l'extérieur de $\mathscr{C}$. Comment construit-on les tangentes à $\mathscr{C}$ passant par O ?
2. Soient $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ deux cercles non-concentriques. Comment construit-on les tangentes communes à $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$?

Exercice 7.

Soit $\mathscr{C}$ un cercle, A, B deux points distincts sur $\mathscr{C}$ et M le milieu de la corde $[AB]$. Soient $[PQ]$ et $[SR]$ deux autres cordes passant par M. On note C (resp. D) le point d'intersection de $[AB]$ avec $[PS]$ (resp. $[RQ]$).



Démontrer que M est aussi le milieu de $[CD]$.

Exercice 8.

Le père Noël achète un énorme gateau. Il le mange avec la mère Noël et leur fils adoptif Bob. Il décide de découper le gateau en 3 parts concentriques. Quels doivent être les deux rayons de coupe pour obtenir trois parts égales ?

Exercice 9.

Cet exercice expose la notion de puissance d'un point par rapport à un cercle. On étudie d'abord quelques propriétés classiques liées à la définition de la puissance avant d'aborder la détermination d'un lieu géométrique.

1. *Puissance d'un point par rapport à un cercle.* Soient O un point du plan, $R > 0$, $\mathscr{C}$ le cercle de centre O et de rayon R et M un point du plan. Soit $\mathscr{D}$ une droite passant par M dont l'intersection avec $\mathscr{C}$ contient deux points P et Q éventuellement égaux. On cherche à prouver que $\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MQ}$ est indépendant de la droite $\mathscr{D}$.

1.a. Soit P' le point diamétralement opposé à P sur $\mathscr{C}$. Etablir que

$$\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MP'}.$$

1.b. En déduire que

$$\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MQ} = OM^2 - R^2$$

et donc que $\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MQ}$ est indépendant de la droite $\mathscr{D}$. Ce réel est noté $\mathcal{P}_{\mathscr{C}}(M)$ et appelé puissance de M par rapport à $\mathscr{C}$.

1.c. A quoi correspondent les ensembles de points définis par :

$$\mathcal{P}_{\mathscr{C}}(M) = 0 \text{ ?}, \quad \mathcal{P}_{\mathscr{C}}(M) < 0 \text{ ? et } \mathcal{P}_{\mathscr{C}}(M) > 0 \text{ ?}$$

2. *Etude d'un lieu géométrique.* Soient O_1, O_2 deux points du plan, $R_1 > 0$, $R_2 > 0$, $\mathscr{C}_1$ le cercle de centre O_1 et de rayon R_1 et $\mathscr{C}_2$ le cercle de centre O_2 et de rayon R_2.

2.a. Déterminer le lieu $\mathscr{L}$ des points M du plan vérifiant :

$$\mathcal{P}_{\mathscr{C}_1}(M) = \mathcal{P}_{\mathscr{C}_2}(M).$$

2.b. Dessiner $\mathscr{L}$ lorsque $O_1O_2 = 3a$, $R_1 = 2a$ et $R_2 = a$ où $a > 0$.

1. Solutions

Solution 1.

1. $\mathscr{C}_1$ est le cercle de centre $\Omega\,(-3, 2)_{\mathscr{R}}$ et de rayon 4.
2. $\mathscr{C}_2$ est le cercle de centre $\Omega\,(1\,/\,3, 0)_{\mathscr{R}}$ et de rayon 2.
3. $\mathscr{C}_3$ est le cercle de centre $\Omega\,(-1, 0)_{\mathscr{R}}$ et de rayon 5.

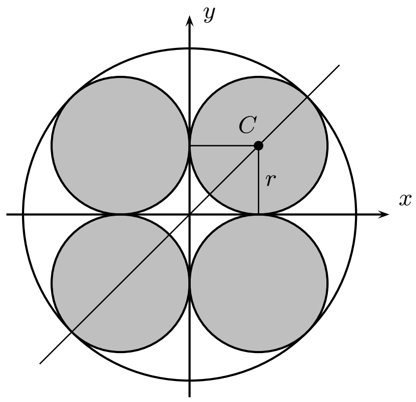
Remarque – *Il n'y a rien à justifier : c'est du cours !*

Solution 2.

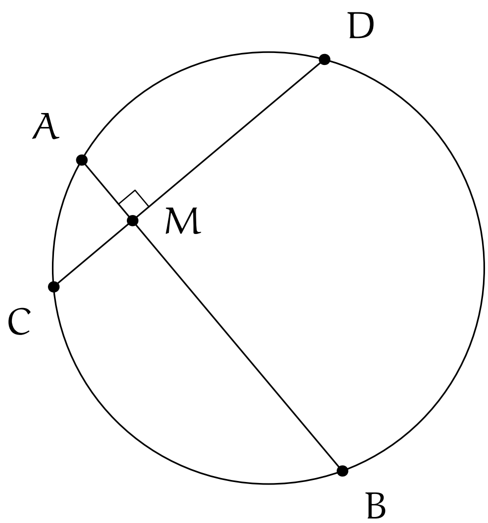
1. L'équation est équivalente à
$$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 13 - \lambda.$$
Ainsi $\mathscr{C}_1 = \varnothing$ lorsque $13 < \lambda$, $\mathscr{C}_1 = \{\Omega\}$ où $\Omega\,(2, 3)_{\mathscr{R}}$ lorsque $\lambda = 13$ et $\mathscr{C}_1$ est le cercle de centre Ω et de rayon $\sqrt{13-\lambda}$ lorsque $\lambda < 13$.
2. L'équation est équivalente à
$$(x-\lambda)^2 + (y-\lambda)^2 = \lambda^2.$$
Ainsi $\mathscr{C}_2 = \{\Omega\}$ où $\Omega\,(\lambda, \lambda)_{\mathscr{R}}$ lorsque $\lambda = 0$ et $\mathscr{C}_2$ est le cercle de centre Ω et de rayon $|\lambda|$ lorsque $\lambda \neq 0$.
3. L'équation est équivalente à
$$(x+\lambda\,/\,2)^2 + (y-2\lambda)^2 = \frac{9}{4}\lambda^2.$$
Ainsi $\mathscr{C}_3 = \{\Omega\}$ où $\Omega\,(-\lambda\,/\,2, 2\lambda)_{\mathscr{R}}$ lorsque $\lambda = 0$ et $\mathscr{C}_3$ est le cercle de centre Ω et de rayon $\frac{3}{2}|\lambda|$ lorsque $\lambda \neq 0$.

Solution 3.

D'abord nous remarquons que le rapport recherché est égal à l'aire hachurée dans la première figure divisée par l'aire du grand cercle.
Notons R (resp. r) le rayon du grand cercle (resp. d'un cercle hachuré de la première figure) et choisissons le système de coordonnées indiqué ci-contre. Nous cherchons à exprimer r en fonction de R.
Par symétrie le centre C du cercle hachuré se trouve sur la droite d'équation $y = x$. D'après Pythagore sa distance à l'origine O est $OC = \sqrt{2}r$. Or $OC + r = R$, c'est-à-dire $\sqrt{2}r + r = R$, d'où
$$r = \frac{R}{1+\sqrt{2}}.$$
Ainsi
$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{4\pi r^2}{\pi R^2} = \left(\frac{2}{1+\sqrt{2}}\right)^2.$$



Solution 4.



Notons O le centre de $\mathscr{C}$. Par Chasles, on a :

$$\begin{aligned}
&MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2\\
=&(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA})^2 + (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB})^2 + (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC})^2 + (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OD})^2\\
=&4MO^2 + 2\overrightarrow{MO}.(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}) + OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD\\
=&4MO^2 + 4R^2 + 2\overrightarrow{MO}.(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})
\end{aligned}$$

Notons I et J les milieux respectifs de $[AB]$ et $[CD]$. Ainsi

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OI}$$
$$\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{OJ}$$

Le quadrilatère $OIMJ$ est un rectangle donc, a fortiori un parallélogramme. Par conséquent, $\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OJ} = \overrightarrow{OM}$. Finalement, on a :

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 4MO^2 + 4R^2 + 4\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{OM} = 4R^2$$

Solution 5.

Notons $\mathscr{D}_1$, $\mathscr{D}_2$ et $\mathscr{D}_3$ les droites d'équations respectives

$$y = 2x + 1, \quad y = -2x + 7 \text{ et } y = -\frac{1}{2}x.$$

Un point Ω est le centre d'un cercle tangent à ces trois droites *si et seulement si*

$$d(\Omega, \mathscr{D}_1) = d(\Omega, \mathscr{D}_2) = d(\Omega, \mathscr{D}_3).$$

En notant $\Omega(x, y)_{\mathscr{R}}$, cela équivaut à

$$\frac{|y - 2x - 1|}{\sqrt{5}} = \frac{|y + 2x - 7|}{\sqrt{5}} = \frac{|2y + x|}{\sqrt{5}},$$

c'est-à-dire

$$|y - 2x - 1| = |y + 2x - 7| = |2y + x|.$$

On trouvera donc *une* solution en résolvant

$$y - 2x - 1 = y + 2x - 7 = 2y + x.$$

Ce système admet pour unique solution

$$(3/2, -11/2),$$

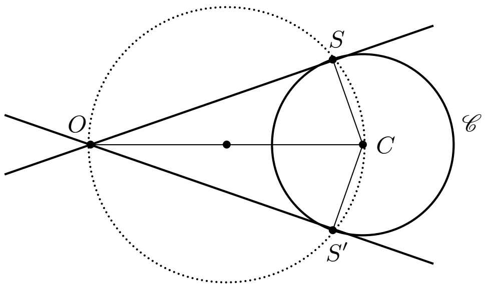
et donc $\Omega(3/2, -11/2)_{\mathscr{R}}$ convient. On trouve alors sans peine que le rayon correspondant vaut

$$R = d(\Omega, \mathscr{D}_3) = \frac{|-11 + 3/2|}{\sqrt{5}} = \frac{19}{2\sqrt{5}}.$$

Remarque – *Il existe en fait quatre cercles solutions : le cercle inscrit au triangle formé par ces trois droites et ses trois cercles exinscrits.*

Solution 6.

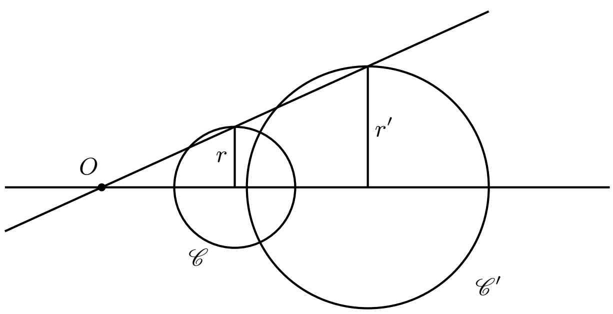
1. Notons C le centre du cercle $\mathscr{C}$. Le cercle de diamètre OC intersecte $\mathscr{C}$ en deux points, S et S'. Alors $\measuredangle(OSC)$ et $\measuredangle(OS'C)$ sont des angles droits et donc (OS) et (OS') sont les tangentes recherchées.



2. Nous remarquons que, dans la situation du dessin ci-dessus, tout homothétie de contre O transforme le cercle $\mathscr{C}$ en un cercle auquel les deux droites (OS) et (OS') sont encore tangentes. On est donc ramené au problème suivant :

Pour deux cercles non-concentriques $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ donnés construire le centre O d'une homothétie qui envoie $\mathscr{C}$ sur $\mathscr{C}'$.

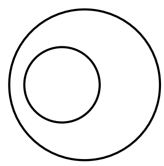
La construction de O est indiquée dans le dessin suivant.



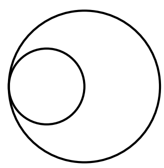
Les deux rayons indiqués sont orthogonaux à la droite passant par les centres des cercles. L'homothétie de centre O et de rapport r'/r envoie $\mathscr{C}$ sur $\mathscr{C}'$. Donc toute tangente à $\mathscr{C}$ passant par O est aussi tangente à $\mathscr{C}'$. On construit alors ces tangentes communes avec la méthode trouvé dans la première question.

Pour finir établissons la liste des cas possibles.

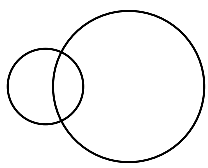
- Aucune tangente commune :



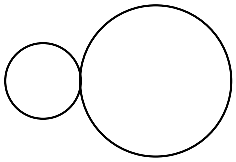
- Une tangente commune :



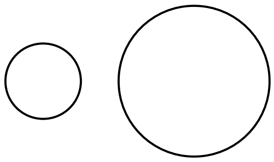
- Une paire de tangentes communes :



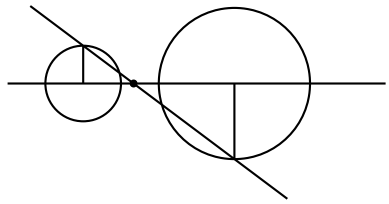
- Trois tangentes communes :



- Deux paires de tangentes communes :



En effet, pour ce dernier cas il y a deux d'homothéties, celle de rapport r'/r mais aussi celle de rapport $-r'/r$ dont le centre est indiqué sur la figure suivante.



Evidemment cette homothétie existait aussi dans les autres cas mais son centre était à l'intérieur des cercles et donc il n'y avait pas de tangente qui passait par là.

Solution 7.

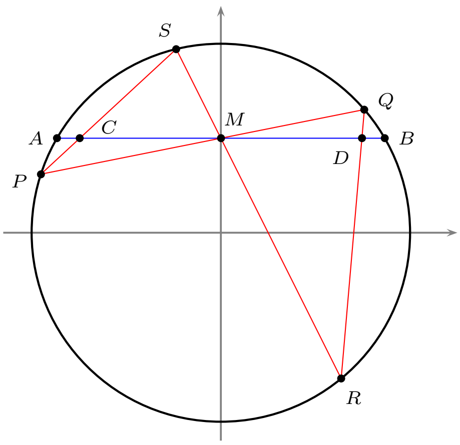
Nous présentons deux preuves, l'une par le calcul en coordonnées et l'autre, plus élégante et astucieuse, par un raisonnement de symétries. On sait dès le départ que la démonstration par un calcul doit être possible car toutes les équations sont de premier ou de second degré.

Première preuve (par le calcul)

On peut supposer que le cercle $\mathscr{C}$ est de rayon 1, puis choisir un repère orthonormé d'origine M telle que la droite (AB) est l'axe des abscisses. Le centre du cercle a alors les coordonnées $(0, m)$ avec $-1 < m < 1$. On a donc les équations suivantes,

$$\mathscr{C}\ :\ x^2 + (y-m)^2 = 1\,, \qquad (AB)\ :\ y = 0\,, \qquad (PQ)\ :\ x = ay\,, \qquad (RS)\ :\ x = by \qquad \text{avec } a, b \in \mathbb{R}.$$

Nous avons pris $x = ay$ au lieu de l'habituel $y = ax$ pour inclûre le cas où (PQ) est vertical et exclûre celui où $(PQ) = (AB)$. En plus nous supposons $(PQ) \neq (RS)$, donc $a \neq b$.



Calculons les coordonnées des points P et Q en fonction de a. En remplaçant l'équation de (PQ) dans celle de $\mathscr{C}$ on voit que les ordonnées de P et de Q sont racines de l'équation de second degré $a^2y^2 + (y-m)^2 = 1$. Autrement dit

$$\forall y \in \mathbb{R}\ :\qquad (1+a^2)y^2 - 2my + m^2 - 1 = (1+a^2)(y - y_P)(y - y_Q).$$

Une équation similaire avec b à la place de a est valable pour y_R et y_S. On a donc les relations racines-coefficients suivantes

$$(1+a^2)(y_P + y_Q) = 2m, \qquad (1+a^2)y_P y_Q = m^2 - 1, \qquad (1+b^2)(y_R + y_S) = 2m, \qquad (1+b^2)y_R y_S = m^2 - 1.$$

Maintenant calculons les coordonnées de C. Nous savons que $y_C = 0$. Pour calculer l'abscisse x_C nous remarquons que $\det(\overrightarrow{PC}, \overrightarrow{PS}) = 0$. Ainsi

$$\begin{aligned} 0 &= \begin{vmatrix} x_C - x_P & x_S - x_P \\ y_C - y_P & y_S - y_P \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_C - ay_P & by_S - ay_P \\ -y_P & y_S - y_P \end{vmatrix} \\ &= (x_C - ay_P)(y_S - y_P) + y_P(by_S - ay_P) = (y_S - y_P)x_C + (b-a)y_P y_S\,. \end{aligned}$$

Donc on a l'équation suivante pour x_C, puis une équation analogue pour x_D (obtenue en changeant P en Q et S en R),

$$(y_S - y_P)x_C = (a-b)y_S y_P\,, \qquad\qquad (y_R - y_Q)x_D = (a-b)y_R y_Q\,.$$

Notre but et de prouver que $x_C + x_D = 0$. Allons y ! Par combinaison linéaire des deux équations, puis en utilisant les relations racines-coefficients, on calcule

$$\begin{aligned} \frac{(y_S - y_P)(y_R - y_Q)}{a-b}(x_C + x_D) &= (y_R - y_Q)y_S y_P + (y_S - y_P)y_R y_Q \\ &= y_R y_S y_P - y_Q y_P y_S + y_S y_R y_Q - y_P y_Q y_R \\ &= \frac{1}{m^2-1}\left(\frac{y_P}{b^2+1} - \frac{y_S}{a^2+1} + \frac{y_Q}{b^2+1} - \frac{y_R}{a^2+1}\right) \\ &= \frac{1}{m^2-1}\left(\frac{y_P + y_Q}{b^2+1} - \frac{y_R + y_S}{a^2+1}\right) \\ &= \frac{1}{m^2-1}\left(\frac{2m}{(a^2+1)(b^2+1)} - \frac{2m}{(b^2+1)(a^2+1)}\right) = 0\,. \end{aligned}$$

Si $y_S \neq y_P$ et $y_R \neq y_Q$ alors le calcul ci-dessus implique $x_C + x_D = 0$. Si $y_S = y_P$ alors par symétrie aussi $y_R = y_Q$ et M est le milieu entre C et D.
Cette dernière situation ne correspond pas à notre dessin, mais à celui ou on a inverti les rôles de P et S. En fait nous avons prouvé en même temps le résultat dual suivant : M est le milieu entre l'intersection de (AB) avec (SQ) et avec (PR).

Deuxième preuve

On observe d'abord que les triangles MQR et MSP sont semblables.
Soit I le milieu de QR, H le pied de la hauteur du triangle MQR issue de M, et N le point tel que $IHMN$ soit un rectangle. Soit O le centre du cercle. Les triangles MNO et MHD sont semblables (car MN, NO et OM sont perpendiculaires à MH, HD et DM respectivement), donc $OM/MN = DM/MH$, et alors

$$OM/DM = MN/MH = IH/MH.$$

Mais si J est le milieu de PS et H' est le pied de la hauteur du triangle MSP issue de M, on a de même $OM/CM = JH'/MH'$.
Comme MQR et MSP sont semblables, on a $IH/MH = JH'/MH'$, donc $OM/DM = OM/CM$, donc $DM = CM$.

Solution 8.

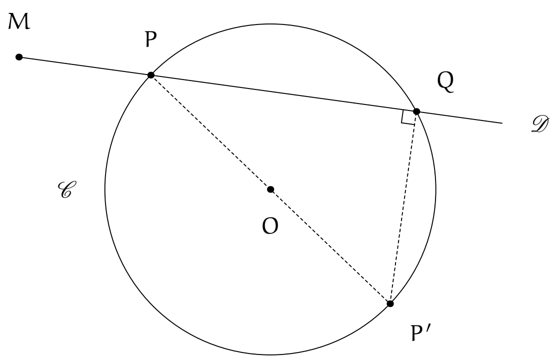
Notons R le rayon du gateau et $R_1 < R_2$ les deux rayons de coupe. On veut

$$\pi R_1^2 = \frac{\pi R^2}{3} \text{ et } \pi R_2^2 = \frac{2\pi R^2}{3}$$

d'où $R_1 = \frac{R}{\sqrt{3}}$ et $R_2 = \sqrt{\frac{2}{3}}R$.

Solution 9.

1. *Puissance d'un point par rapport à un cercle.*



1.a.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MQ} &= (\overrightarrow{MP'} + \overrightarrow{P'Q})\cdot\overrightarrow{MP} \\ &= \overrightarrow{MP'}\cdot\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{P'Q}\cdot\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MP'}\cdot\overrightarrow{MP} \end{aligned}$$

car $\overrightarrow{P'Q}\perp\overrightarrow{MP}$.

1.b. On a :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MP'}\cdot\overrightarrow{MP} &= (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OP'})\cdot(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OP}) \\ &= \overrightarrow{MO}^2 + (\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OP'})\cdot\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OP'}\cdot\overrightarrow{OP} \\ &= \overrightarrow{MO}^2 + \vec{0}\cdot\overrightarrow{MO} - \overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OP} \\ &= OM^2 - OP^2 \end{aligned}$$

car O est le milieu de $[PP']$. Ainsi, d'après le **1.** :

$$\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MQ} = OM^2 - R^2,$$

où R est le rayon de $\mathscr{C}$. Cette expression ne dépend que de la distance OM, elle est donc indépendante de la droite $\mathscr{D}$ choisie.

1.c. Comme $\mathcal{P}_{\mathscr{C}}(M) = OM^2 - R^2\ldots$

▶ l'ensemble des points qui vérifie $\mathcal{P}_{\mathscr{C}}(M) = 0$ est le cercle $\mathscr{C}$.

▶ l'ensemble des points qui vérifie $\mathcal{P}_{\mathscr{C}}(M) > 0$ est l'extérieur du disque fermé de frontière $\mathscr{C}$.

▶ l'ensemble des points qui vérifie $\mathcal{P}_{\mathscr{C}}(M) < 0$ est le disque ouvert de frontière $\mathscr{C}$.

2. *Etude d'un lieu géométrique.*

2.a. D'après la question **1.**, $\mathscr{L}$ est l'ensemble des points M vérifiant :

$$O_1M^2 - R_1^2 = O_2M^2 - R_2^2,$$

i.e. $O_1M^2 - O_2M^2 = R_1^2 - R_2^2$.

▶ *Cas 1 : $O_1 = O_2$ et $R_1 = R_2$ (i.e. $\mathscr{C}_1 = \mathscr{C}_2$).* Il est clair que $\mathscr{L} = \mathscr{P}$.

▶ *Cas 2 : $O_1 = O_2$ et $R_1 \neq R_2$.* Il est clair que $\mathscr{L} = \varnothing$.

▶ *Cas 3 : $O_1 \neq O_2$.* Comme

$$O_1M^2 = (\overrightarrow{O_1O_2}+\overrightarrow{O_2M})^2 = O_1O_2^2+2\overrightarrow{O_1O_2}\cdot\overrightarrow{O_2M}+O_2M^2$$

$\mathscr{L}$ est l'ensemble des points M du plan tels que :

$$\overrightarrow{O_1O_2}\cdot\overrightarrow{O_2M} = \frac{R_1^2 - R_2^2 - O_1O_2^2}{2}.$$

Notons

$$k = \frac{R_1^2 - R_2^2 - O_1O_2^2}{2O_1O_2}$$

et soit H l'unique point de (O_1O_2) tel que :

$$\overrightarrow{O_2H} = k\frac{\overrightarrow{O_1O_2}}{O_1O_2}.$$

Un point M appartient à $\mathscr{L}$ *si et seulement si*

$$\frac{\overrightarrow{O_1O_2}}{O_1O_2}\cdot\overrightarrow{O_2M} = k,$$

c'est-à-dire le projeté orthogonal de M sur (O_1O_2) vaut H. L'ensemble $\mathscr{L}$ est donc la perpendiculaire à (O_1O_2) issue de H.

▶ Comme $O_1O_2 = R_1 + R_2$, les cercles $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ sont tangents extérieurement. On sait que $\mathscr{L}$ est une droite orthogonale à (O_1O_2), puisque le point de contact I des deux cercles vérifie

$$\mathcal{P}_{\mathscr{C}_1}(I) = 0 = \mathcal{P}_{\mathscr{C}_2}(I),$$

la droite $\mathscr{L}$ passe par I, ce qui achève de déterminer $\mathscr{L}$.