Exercice 1.

Déterminer les isométries du plan laissant invariant les rubans (ou frises) infinis ci-dessous.

bbbbbbbbbbbbbbbbbbbbb
bqbqbqbqbqbqbqbqbqbq
cccccccccccccccccccccc
bdbdbdbdbdbdbdbdbdbd
xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx
bdpqbdpqbdpqbdpqbdpq
bpbpbpbpbpbpbpbpbpbpb

Exercice 2.

Trouver les éléments de symétrie des figures géométriques suivantes : cercle, losange, rectangle, carré, pentagone, hexagone, polygone régulier.

Exercice 3.

Trouver les éléments de symétrie des solides de Platon.

Exercice 4.

Lesquels des ensembles suivants munis d'une loi forment des groupes ?

$$\begin{array}{llll}
(\mathbb{N},+), & (\mathbb{Z},+), & (\mathbb{Z},\times), & (\mathbb{Z}^*,\times),\\
(\mathbb{Q}^*,\times), & (\mathbb{Q}^*,+), & (\{-1,1\},+), & (\{-1,1\},\times),\\
(\mathbb{Q}^*_+,\times), & (\mathbb{Q}^*_-,\times), & (]0,1],\times), & (\mathbb{R},+),\\
(\mathbb{C},+), & (\{i,-i\},\times), & (\{\pm 1,\pm i\},\times), & (\mathbb{R}^3,\wedge),\\
(\mathbb{R}^3,+), & (\mathbb{R}^3,\cdot). & &
\end{array}$$

Exercice 5.

Pour $n = 1, 2, 3, 4$ déterminer tous les groupes à n éléments.

Exercice 6.

Soit $A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer des matrices B et C de sorte que l'ensemble $\{A, B, C\}$ soit un groupe avec la loi de multipliation matricelle.

Exercice 7.

Soit

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer des matrices C et D de sorte que l'ensemble $\{A, B, C, D\}$ soit un groupe avec la loi de multipliation matricelle. Le groupe ainsi obtenu est-il isomorphe à un groupe que vous connaissez déjà ?

Exercice 8.

Show that the binary operation $\circledcirc$ on $\mathbb{Z}$ defined by

$$\forall (n,m) \in \mathbb{Z}^2 \ : \quad m \circledcirc n = m + n + mn\,,$$

is commutative and associative. Is $(\mathbb{Z}, \circledcirc)$ a group ?

Exercice 9.

Soit G un groupe. On dit que des éléments a et b de G sont *conjugués* (ou *semblables*) s'il existe $g \in G$ tel que $a = g^{-1}bg$. On note alors $a \sim g$. Montrer que $\sim$ est une *relation d'équivalence*, c'est-à-dire qu'elle vérifie les propriétés suivantes.

Réflexivité : $\forall\, a \in G \ : \quad a \sim a,$
Symétrie : $\forall\, a, b \in G \ : \quad a \sim b \Rightarrow b \sim a,$
Transitivité : $\forall\, a, b, c \in G \ : \quad (a \sim b \text{ et } b \sim c) \Rightarrow a \sim c.$

Exercice 10.

Construire un groupe cyclique $\mathbb{Z}_5$ d'ordre 5. Déterminer tous ses sous-groupes. Trouver un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$ isomorphe à $\mathbb{Z}_5$.
Même questions pour un groupe cyclique $\mathbb{Z}_6$ d'ordre 6.

Exercice 11.

Dans le groupe de permutations $\mathfrak{S}_5$ on considère les éléments

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Trouver l'ordre de chacune de ces trois permutations.
2. Calculer a^{-1} et b^{-1}. Comparer $a^{-1}b^{-1}$ et $(a \circ b)^{-1}$.

Exercice 12.

Pour quels $n \in \mathbb{N}^*$ le groupe de permutations $\mathfrak{S}_n$ est-il abélien ?

Exercice 13.

On considère le groupe G suivant.

	e	a	b	c	d	f
e	e	a	b	c	d	f
a	a	e	d	f	b	c
b	b	f	e	d	c	a
c	c	d	f	e	a	b
d	d	c	a	b	f	e
f	f	b	c	a	e	d

1. Est-ce que G est abélien ?
2. Déterminer toutes les classes de conjugaison de G.
3. Déterminer tous les sous-groupes cycliques de G.