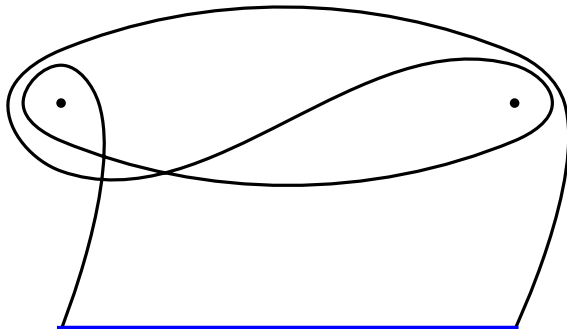


## 1. Solutions

**Solution 1.**



Mathematics is the cheapest science.  
 Unlike physics or chemistry, it does not  
 require any expensive equipment.  
 All one needs for mathematics is  
 a pencil and paper.

*George Pólya*

L'idée est simple : notons  $E(n)$  le plan duquel on a enlevé  $n$  points.

- ▶ Le groupe fondamental de  $E(2)$  est le groupe libre à deux générateurs  $a$  et  $b$  qui correspondent à faire un tour autour de chaque clou (disons dans le sens direct). Le dessin représente alors le lacet  $aba^{-1}b^{-1}$ . Enlever un clou correspond à quotienter de manière à ce que  $a$  (ou  $b$ ) devienne le lacet nul. Dans les deux cas  $aba^{-1}b^{-1}$  devient le lacet nul dans le quotient.
- ▶ Pour  $n = 3$ , c'est alors simple (mais plus compliqué à dessiner). Dans  $E(3)$  dont le groupe fondamental est le libre de générateurs  $a, b, c$ , on prend  $dcd^{-1}c^{-1}$  où  $d$  désigne l'élément  $d = aba^{-1}b^{-1}$  déjà utilisé en haut. Alors ça cascade comme désiré.
- ▶ La construction par récurrence pour tout  $n > 3$  est alors évident.