Exercice 1 —

On note $\mathscr{A}$ l'assertion suivante.

$$\forall\, x \in \,]0,\infty[\ \ \forall\, y \in \,]x,\infty[\ \ \exists\, z \in \,]0,\infty[\,: \quad x < z < y.$$

1. Ecrire la négation de $\mathscr{A}$.

2. L'assertion $\mathscr{A}$ est-elle vraie ? Prouvez votre réponse.

Exercice 2 —

Calculer :

$$A = \sum_{i=1}^{5} i \qquad B = \sum_{k=0}^{n} n \qquad C = \frac{(n+2)!}{n!}$$

Exercice 3 —

Quel est le coefficient de x^3y^2 dans le développement de $(x + \frac{1}{4}y)^5$? Et celui de xy^5 ?

Exercice 4 — *Montagnes russes*

Simplifier $\left(4^{\sqrt{2a}}\right)^{\sqrt{a}}\left(2^{-8^{1/2}}\right)^{a}$.

Exercice 5 — *Pourcentages*

Un prix subit trois variations succéssives, la première de $-60\,\%$, la deuxième de $t\,\%$ et la troisième de $+25\,\%$. Déterminer t tel que le prix final reste le même que le prix initial.

Exercice 6 —

Résoudre dans $\mathbb{R}$.

1. $|3x+1| \leqslant 6$.

2. $|4x+1| > |x-7|$.

Corrigé de l'exercice 1 —

1. La négation de $\mathscr{A}$ est

$$\exists\, x \in]0,\infty[\;\; \exists\, y \in]x,\infty[\;\; \forall\, z \in]0,\infty[: \quad x \geqslant z \;\text{ ou }\; z \geqslant y.$$

2. Oui, l'assertion $\mathscr{A}$ est vraie. Soit $x \in]0,\infty[$. Soit $y \in]x,\infty[$. Posons $z = \frac{x+y}{2}$. Puisque $x < y$ on a

$$x = \frac{x+x}{2} < \frac{x+y}{2} = z < \frac{y+y}{2} = y.$$

Corrigé de l'exercice 2 —

$$A = \sum_{i=1}^{5} i = 1+2+3+4+5 = 15, \qquad B = \sum_{k=0}^{n} n = n\sum_{k=0}^{n} 1 = n(n+1), \qquad C = \frac{(n+2)!}{n!} = (n+2)(n+1).$$

Corrigé de l'exercice 3 —

On a

$$\left(x + \frac{y}{4}\right)^5 = \sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} x^k \left(\frac{y}{4}\right)^{5-k}.$$

Dans cette somme le seul terme contenant x^3y^2 correspond à $k = 3$. Ainsi le coefficient recherché est

$$\binom{5}{3}\frac{1}{4^2} = \frac{5\times 4}{2} \times \frac{1}{4^2} = \frac{5}{2\times 4} = \frac{5}{8}.$$

Le coefficient de xy^5 est nul, puisque ce terme n'apparaît pas dans la somme.

Corrigé de l'exercice 4 — *Montagnes russes*

$$\left(4^{\sqrt{2a}}\right)^{\sqrt{a}} \left(2^{-8^{1/2}}\right)^a = 4^{\sqrt{2a}\sqrt{a}} \left(2^{-\sqrt{8}}\right)^a = 4^{\sqrt{2}a}2^{-2\sqrt{2}a} = 2^{2\sqrt{2}a}2^{-2\sqrt{2}a} = 1.$$

Corrigé de l'exercice 5 — *Pourcentages*

Soit $x = 1 + \frac{t}{100}$ le coefficient multiplicateur de la deuxième variation. Alors

$$0.4 \times x \times 1.25 = 1$$

ou encore $0.5x = 1$, donc $x = 2$. On obtient $t = 100$. La deuxième varation est donc une augmentation de 100 %.

Corrigé de l'exercice 6 —

1. $|3x+1| \leqslant 6 \iff -6 \leqslant 3x+1 \leqslant 6 \iff -\frac{7}{3} \leqslant x \leqslant \frac{5}{3}$.

2. Le terme $4x+1$ (resp. $x-7$) change de signe en $-\frac{1}{4}$ (resp. 7). On distingue trois cas.
Soit $x < -\frac{1}{4}$. Alors, sous cette hypothèse,

$$\begin{aligned} |4x+1| > |x-7| &\iff -(4x+1) > -(x-7) \\ &\iff -8 > 3x \\ &\iff x < -\frac{8}{3} \\ &\iff x \in \left]-\infty, -\frac{8}{3}\right[. \end{aligned}$$

Soit $-\frac{1}{4} \leqslant x \leqslant 7$. Alors, sous cette hypothèse,

$$\begin{aligned} |4x+1| > |x-7| &\iff 4x+1 > -(x-7) \\ &\iff 5x > 6 \\ &\iff x > \frac{6}{5} \\ &\iff x \in \left]\frac{6}{5}, 7\right]. \end{aligned}$$

Soit $x > 7$. Alors, sous cette hypothèse,

$$\begin{aligned} |4x+1| > |x-7| &\iff 4x+1 > x-7 \\ &\iff x > -\frac{8}{3} \\ &\iff x \in]7, \infty]. \end{aligned}$$

Au final, l'ensemble des réels x qui vérifient l'inégalité $|4x+1| > |x-7|$ est $\mathbb{R} \setminus [-\frac{8}{3}, \frac{6}{5}]$.