I–FONCTIONS ARITHMÉTIQUES.

On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des applications de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{C}$ telles que $f(1) \neq 0$.

Dans $\mathcal{A}$, on pose $(f * g)(n) = \displaystyle\sum_{d|n} f(d)g\big(\frac{n}{d}\big)$.

1° Montrer que $*$ est une loi interne et que $(\mathcal{A}, *)$ est un groupe commutatif. On notera e son élément neutre.

On nomme fonctions multiplicative tout élément de $\mathcal{A}$ tel que

$$f(1) = 1 \quad \text{et} \quad m \wedge n = 1 \Longrightarrow f(mn) = f(m)f(n).$$

On note $\mathcal{M}$ l'ensemble des fonctions multiplicatives

On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres primaires, c'est-à-dire de la forme p^α avec p premier et $\alpha \in \mathbb{N}^*$.

2° Soit $g : \mathcal{P} \longrightarrow \mathbb{C}$ telle que $g(1) = 1$. Montrer qu'il existe une unique application f multiplicative dont la restriuction à $\mathcal{P}$ égale g.

3° Montrer que $\mathcal{M}$ est stable pour la loi $*$ et que $e \in \mathcal{M}$.

4° Soit $f \in \mathcal{M}$, f^{-1} son inverse dans $\mathcal{A}$ et g l'unique élément de $\mathcal{M}$ qui coincide avec f^{-1} sur $\mathcal{P}$. Prouver que $g * f = e$. Conclure.

II–EXEMPLES DE FONCTIONS MULTIPLICATIVES.

On définit la fonction $\mathbb{I}$ par $\mathbb{I}(n) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1° Expliciter $d = \mathbb{I} * \mathbb{I}$ et $\sigma = \mathbb{I} * Id$ où Id désigne l'identité.

2° On pose $\mu = \mathbb{I}^{-1}$ (Fonction de Möbius, le même que celui du ruban).

calculer $\mu(p^r)$ où p est premier et en déduire $\mu(n)$ lorsque $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$.

3° Pour f et g dans $\mathcal{A}$ Montrer que $g(n) = \displaystyle\sum_{d|n} f\big(\frac{n}{d}\big) \iff f(n) = \sum_{d|n} \mu(d)g\big(\frac{n}{d}\big)$. Cette équivalence se nomme formule d'inversion de Möbius.

4° Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\varphi(n) = \mathrm{Card}\{k \in \mathbb{N}^*, k \leqslant n,\ k \wedge n = 0\}$.

a) Pour d divisant n, on pose $A_d = \{m \in \mathbb{N}^*,\ m \wedge n = d,\ m \leqslant n\}$.

Montrer que $\mathrm{card}\ \mathrm{A_d} = \varphi\big(\frac{n}{d}\big)$. En déduire $n = \displaystyle\sum_{d|n} \varphi\big(\frac{n}{d}\big)$.

b) Montrer que $\varphi \in \mathcal{M}$ et que $\varphi(n) = n \displaystyle\sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d}$.

c) Calculer $\varphi(n)$ en fonction de la décomposition de n en facteurs premiers.

III–SOMMES DE RAMANUJAN.

On suppose dans cette partie que $m \wedge m' = 1$.

1° **a)** Montrer que tout entier $n \leqslant mm'$ peut s'écrire $n = am' + a'm$ avec $a, a' \in \mathbb{N}$ puis que si $n \wedge mm' = 1$ alors $a \wedge m = a' \wedge m' = 1$.

b) Prouver que $\left(\dfrac{\mathbb{Z}}{mm'\mathbb{Z}}\right)^* = m'\left(\dfrac{\mathbb{Z}}{m\mathbb{Z}}\right)^* + m\left(\dfrac{\mathbb{Z}}{m'\mathbb{Z}}\right)^*$ où l'on a noté $\left(\dfrac{\mathbb{Z}}{k\mathbb{Z}}\right)^*$ l'ensemble des entiers plus petits que k et premiers avec k.

2° On pose $e(t) = e^{2\pi i t}$ et $c_m(q) = \displaystyle\sum_{h\in(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^*} e\left(\frac{hm}{q}\right)$.

Prouver que $c_m \in \mathcal{M}$.

3° Soit F une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. Montrer que $\displaystyle\sum_{1\leqslant h\leqslant n} F\left(\frac{h}{n}\right) = \sum_{d|n} \sum_{\substack{a\leqslant d\\ a\wedge d=1}} F\left(\frac{a}{d}\right)$.

4° En déduire $c_m(n) = \displaystyle\sum_{\substack{d|m\\ d|n}} \mu\left(\frac{n}{d}\right) d$ $(c_m(q) \in Z)$. (donc $c_m(n) \in \mathbb{Z}$! ce qui est loin d'être évident).

En déduire $\mu(n) = \displaystyle\sum_{h\wedge n=1} e^{\frac{2i\pi h}{n}}$.

IV–Nombres parfaits.

Un entier est dit parfait si $\sigma(n) = 2n$.

1° Montrer que si $2^n - 1$ est premier, $N = 2^{n-1}(2^n - 1)$ est parfait.

2° On se propose de prouver la réciproque. Soit $N = 2^n b$, avec $b0$ impair, un nombre parfait.

a) Montrer qu'il existe un entier c tel que $b = (2^{n+1} - 1)c$ et $\sigma(b) = 2^{n+1}c$.

b) Montrer que l'hypothèse $c > 1$ conduit à une contradiction.

c) Montrer que $2^{n+1} - 1$ est premier.