Pour tout réel x on désigne par $[x]$ la partie entière de x, et par $\{x\}$ sa partie fractionnaire, c'est-à-dire que l'on a $x = [x] + \{x\}$.

Un nombre premier sera toujours considérer comme un élément de $\mathbb{N}$.

Dans tout le problème, la lettre p représentera toujours un nombre premier.

Etant donné un réel $x \geqslant 2$, on pose $P(x) = \{p/\ p \text{ premier},\ p \leqslant x\}$. Conformément à la convention conçernant la lettre p, on a

$$\sum_{p \in P(x)} f(p) = \sum_{p=2}^{x} f(p).$$

La relation "k divise n" sera noté $k \mid n$, et toute somme du type $\displaystyle\sum_{d \in D(n)} f(d)$, où $D(n)$ désigne l'ensemble des diviseurs entiers naturels de $n \neq 0$, pourra être notée $\displaystyle\sum_{d \mid n} f(d)$.

L'objet du problème est l'étude du comportement asymptotique au voisinage de $+\infty$ de la fonction

$$\pi(x) = \text{Card } P(x) = \sum_{p=2}^{x} 1,$$

qui représente le nombre d'entiers premiers inférieurs à x.

PARTIE I

1° Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite monotone de réels positifs, et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de réels. On pose $s_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} b_k$, de sorte qu'on a $b_k = s_k - s_{k-1}$.

Exprimer la somme $\displaystyle\sum_{k=M+1}^{N} a_k b_k$ en fonction des a_n et des s_n, et en déduire

$$\left| \sum_{k=M+1}^{N} a_k b_k \right| \leqslant 2 \ \text{Sup}\,\{a_{M+1}, a_N\} \sup_{M \leqslant n \leqslant N} |s_n| \, .$$

2° Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels et $\varphi \in \mathcal{C}^1([1,+\infty[)$. On pose pour $x \geqslant 1$

$$A(x) = \sum_{n=1}^{[x]} a_n = \sum_1^x a_n.$$

a) Démonter que pour tout $x \geqslant 1$, A est intégrable sur $[1,x]$ et prouver que $dsp \int_1^x A(u)\varphi'(u)\,du = \sum_1^x a_n \int_n^x \varphi'(u)\,du$

b) En déduire que pour $x \geqslant 1$ on a

$$\sum_1^x a_n\varphi(n) = A(x)\varphi(x) - \int_1^x A(u)\varphi'(u)\,du.$$

c) Application : on considère la suite constante $(a_n = 1)$, en observant que $A(u) = [u]$, prouver que

$$\forall\, x \geqslant 1, \qquad |\ln([x]!) - x\ln x + x| \leqslant 1 + 2\ln x.$$

3° **a)** En examinant la série de terme général $u_{n+1} - u_n$ prouver que la suite $u_n = \displaystyle\sum_1^n \frac{1}{k} - \ln n$ est convergente. On notera désormais sa limité γ.

b) Prouver que $\displaystyle\int_1^n \frac{\{u\}}{u^2}\,du = 1 - u_n$ et en déduire

$$\gamma = 1 - \int_1^{+\infty} \frac{\{u\}}{u^2}\,du.$$

Pour toute la suite on pose $I(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\{u\}}{u^2}\,du$ pour tout $x \geqslant 1$.

4° **a)** Donner un majorant très simple de $I(x)$.

b) On définit la fonction réelle U en posant pout $x \geqslant 1$ $U(x) = \displaystyle\sum_{1\leqslant n\leqslant x} \frac{1}{n}$.

Démontrer en utilisant le 2)b) avec $a_n = 1$, l'égalité

$$U(x) - \ln x - \gamma = I(x) + \frac{[x]}{x} - 1$$

et en déduire $\forall\, x \geqslant 1, \qquad |U(x) - \ln x - \gamma| \leqslant \dfrac{2}{x}$.

PARTIE II

On définit sur $\mathbb{N}^*$ la fonction μ par

$$\begin{cases} \mu(1) = 1 & \\ \mu(n) = (-1)^r & \text{si } n \text{ est le produit de } r \text{ nombres premiers distincts} \\ \mu(n) = 0 & \text{dans tous les autres cas} \end{cases}$$

de sorte que $\mu(6) = 1$ et $\mu(12) = 0$.

1° Etant donné un entier $n = p_1^{i_1} p_2^{i_2} \cdots p_r^{i_r}$, en caractérisant et en dénombrant les diviseurs d de n pour lesquels $\mu(d) \neq 0$, montrer que si $n \neq 1$ alors $\displaystyle\sum_{d|n} \mu(d) = 0$.

2° A une fonction f définie sur $[1,+\infty[$, on associe $F(x) = \displaystyle\sum_{1\leqslant n\leqslant x} f(\frac{x}{n})$.

a) Vérifier que l'on a pour $x \geqslant 1$ $f(x) = \displaystyle\sum_{1\leqslant n\leqslant x} \mu(n) F(\frac{x}{n})$.

b) On note Φ l'application qui à f associe F, montrer que Φ est un automorphisme de l'espace vectoriel des application de $[1,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$.

Un couple (f,F) de fonctions réelles définies sur $[1,+\infty[$ et tel que $F=\Phi(f)$ est nommé un μ-couple.

3° Pour tout $x \geqslant 2$ et tout entier premier $p \leqslant x$, on pose

$$\nu_p(x) = \operatorname{Sup}\{\nu,\ \nu \in \mathbb{N}^*,\ p^\nu \leqslant x\} \quad \text{et} \quad i_p(x) = \sum_{\nu=1}^{\nu_p(x)} [\frac{x}{p^\nu}].$$

a) En comptant le nombre d'entier $m \leqslant [x]$ divisible par p^ν et pas par $p^{\nu+1}$, montrer que

$$[x]! = \prod_{2\leqslant p \leqslant x} p^{i_p(x)}.$$

b) Montrer que $i_p(x)$ est le cardinal de l'ensemble $\{(n,\nu)\ /\ np^\nu \leqslant x\}$.

c) Soit Λ la fonction définie sur $\mathbb{N}$ par

$$\begin{cases} \Lambda(n) = \ln p & \text{si } n = p^\nu,\ \nu \geqslant 1 \text{ et } p \text{ premier,} \\ \Lambda(n) = 0 & \text{dans les autre cas,} \end{cases}$$

et Ψ la fonction définie pour $x \geqslant 1$ par $\Psi(x) = \sum_{1\leqslant n \leqslant x} \Lambda(n)$.

Déduire des questions précédentes que $\Phi(\Psi)(x) = \ln([x]!)$.

PARTIE III

1° Soit (f,F) un μ- couple, on suppose qu'il existe $H>0$ et $\beta \in [0,1[$, tels que $\forall x \geqslant 1$, $|F(x)| \leqslant Hx^\beta$.

a) En majorant la somme $\sum_{1\leqslant n\leqslant x} \frac{1}{n^\beta}$ au moyen d'une intégrale, prouver que pour $x \geqslant 1$, on a $|f(x)| \leqslant \frac{Hx}{1-\beta}$

b) Soit (f,F) un μ- couple, on suppose l'existence de A,B,C,K dans $\mathbb{R}$ et $\beta \in [0,1[$ tels que pour $x \geqslant 1$ on ait

$$|F(x) - Bx\ln x - Cx| \leqslant Kx^\beta.$$

Montrer qu'on peut choisir des constantes b,c telles que si $f_0(x) = f(x) - bx - c$ et $F_0(x) = \Phi(f_0)$ alors il existe $H>0$ telque $|F_0(x)| \leqslant Hx^\beta$.

On utilisera les résultats de la question I)3)

c) En déduire qu'il existe H_1 tel que $|f(x)| \leqslant H_1 x$.

2° Montrer que $\frac{\Psi(x)}{x}$ est bornée dans $[1,+\infty[$.

3° On pose $M(x) = \sum_{1\leqslant n\leqslant x} \mu(n)$ et l'on admet dans la suite du problème qu'au voisinage de $+\infty$, $M(x) = o(x)$ c'est-à-dire que

$$\forall \varepsilon > 0, \qquad \exists A > 0, \forall x > A, \qquad |M(x)| \leqslant \varepsilon x.$$

On continue d'adopter les mêmes notations et les mêmes hypothèses qu'à la question précédente, mais l'on suppose en plus que F est croissante.

Soit $\eta \in]0;1]$ et $x \geqslant \frac{1}{\eta}$.

a) Montrer que $\left| \sum\limits_{1 \leqslant n \leqslant \eta x} \mu(n) F_0(\frac{x}{n}) \right| \leqslant \dfrac{H\, x\, \eta^{1-\beta}}{1-\beta}$.

b) On pose $F_1(x) = bxU(x) + c[x]$ de sorte que $F_0 = F - F_1$ où F et F_1 sont croissantes. En utilisant le I)1) et l'hypothèse sur M montrer que pour x assez grand on a

$$\left| \sum_{\eta x < n \leqslant x} \mu(n) F_0(\frac{x}{n}) \right| \leqslant \varepsilon x.$$

c) En déduire que $\Psi(x) = x + o(x)$ au voisinage de $+\infty$.

4° **a)** Démontrer l'égalité$\Psi(x) = \sum\limits_{2 \leqslant p \leqslant x} \left[\dfrac{\ln x}{\ln p} \right] \ln p$

b) On pose pour $x \geqslant 2$, $\theta(x) = \sum\limits_{2 \leqslant p \leqslant x} \ln p$; prouver

$$\Psi(x) = \sum_{k=1}^{\left[\frac{\ln x}{\ln 2}\right]} \theta\left(x^{\frac{1}{k}}\right).$$

5° **a)** En déduire que pour $x \geqslant 2$ on a $\theta(x) \leqslant \Psi(x) \leqslant \pi(x)\ \ln x$.

b) Pour tout $x > e = \exp 1$ et $y \in]1, x[$ démontrer que $\theta(x) \geqslant \pi(x) \ln y - y\ \ln y$.

c) Soit $f(x) = \dfrac{x}{\ln^2 x}$ montrer que si $x > e$, on a $f(x) \in]1, x[$.

d) Calculer $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{\ln f(x)}{\ln x}$ et $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{f(x)\ \ln x}{x}$.

6° En utilisant les inégalités ci-dessus, prouver que $\pi(x) \sim \dfrac{x}{\ln x}$.