PARTIE I

1° $\sum_{N+1}^{N} a_n(s_n - s_{n-1}) = \sum_{M+1}^{N-1} s_k(a_k - a_{k+1}) + a_N s_N - a_{M+1}s_M$; en valeur absolue, ceci est majoré par

$$\operatorname*{Sup}_{M\leqslant n\leqslant N} |s_n| \Big[\sum_{M+1}^{N-1} |a_k - a_{k+1}| + a_N + a_{M+1} \Big] \quad (a_i \geqslant 0).$$

Si (a_n) décroît, le $[\ ] = 2a_{M+1}$ et si (a_n) croît, le $[\ ] = 2a_N$ d'où le résultat.

2° a) A est constante par intervalle donc intégrable sur tout segment. On procède par récurrence (on peut aussi faire un calcul plus direct)

Si $x < 2$, $A(u) = a_1$ sur $[1, x[$; et c'est évident.

– Si l'égalité est vrai pour $x < n$ et que $n \leqslant x < n+1$ on a

$$\int_1^x = \int_1^n + \int_n^x = \sum_1^n a_k \int_k^n \varphi' + \int_n^x A(u)\varphi' = \sum_1^n a_k \int_k^n + \int_n^x \sum_1^n a_k\varphi' = \sum_1^n a_k \Big(\int_k^n + \int_n^x \Big)$$

b) On a donc $\displaystyle\int_1^x A\varphi' = \sum_1^x a_k[\varphi(x) - \varphi(n)]$ etc

c) $\displaystyle\ln[x]! = \sum_1^{[x]} \ln n = \ln x \sum_1^{[x]} 1 - \int_1^x \frac{[u]}{u} du = x\ln x - (x - [x])\ln x + \int_1^x \frac{u-[u]}{u} - 1\ du$

donc $\displaystyle\ln[x]! - x\ln x + x = -1 - (x - [x])\ln x + \int_1^{[x]} \frac{u-[u]}{u} du$ et comme $u - [u] \leqslant 1$ on tire

$$|\ln[x]! - x\ln x + x| \leqslant 1 + \ln x + \ln x = 1 + 2\ln x.$$

3° a) $\displaystyle u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \ln\Big(1 + \frac{1}{n}\Big) \sim -\frac{1}{2n^2}u$ qui est le terme général d'une série convergente donc la série $u_{n+1} - u_n$ c'est-à-dire la suite (u_n) converge.

b)
$$\int_1^n \frac{\{u\}}{u^2} du = \sum_1^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{u-k}{u^2} du = \sum_1^{n-1} \ln(k+1) - \ln k - k\Big(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\Big)$$
$$= \ln n - \sum_1^{n-1} \frac{1}{k+1} = 1 - u_n$$

On en déduit l'égalité par passage à la limite puisque l'intégrale converge puisque l'intégrand est $\leqslant 1/u^2$.

4° a) $\{u\} \leqslant 1$ donc $I(x) \leqslant \frac{1}{x}$.

b) On prend $a_n = 1$ et $\varphi = 1/x$ d'où $\displaystyle U(x) = \frac{[x]}{x} + \int_1^x [u]\frac{du}{u^2} = \frac{[x]}{x} + \int_1^x \frac{u - \{u\}}{u^2} du = \frac{[x]}{x} + \ln x - (1 - \gamma - I(x))$ d'où

$$|U(x) - \ln x - \gamma| \leqslant |I(x)| + \frac{x-[x]}{x} \leqslant \int_x^{+\infty} \frac{du}{u^2} + \frac{1}{x} = \frac{2}{x}.$$

PARTIE II

1° $\mu(d) \neq 0$ ssi d est un produit de p_i distincts. Il y a C_r^k diviseurs, produit de k p_i distincts pour lesquels $\mu(d) = (-1)^k$ d'où

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \sum_0^r (-1)^k C_r^k = 0.$$

2° a) ... $= \displaystyle\sum_{n \leqslant x} \mu(n) \sum_k^{x/n} f\left(\frac{x}{nk}\right) = \sum_{m \leqslant x} f\left(\frac{x}{m}\right) \sum_{n|m} \mu(n) = f(x)$ car toutes les sommes sont nulles sauf pour $m = 1$.

b) C'est évidemment linéaire, injectif car si $F = 0$, f aussi et surjectif puisque tout F définit un f.

3° a) $p^\nu | m \iff \exists\, k \,/\, m = kp^\nu$ il y a donc $\left[\dfrac{m}{p^\nu}\right]$ entiers divisibles par p^ν auxquels on ôte ceux divisibles par $p^{\nu+1}$ d'où $\left[\dfrac{m}{p^\nu}\right] - \left[\dfrac{m}{p^{\nu+1}}\right]$ entier divisibles exactement par p^ν. Ainsi, l'exposant de p vaut

$$\sum \nu\left(\left[\frac{m}{p^\nu}\right] - \left[\frac{m}{p^{\nu+1}}\right]\right) = \sum \left[\frac{m}{p^\nu}\right](\nu - (\nu - 1)) = \sum \left[\frac{m}{p^\nu}\right] = i_p(x).$$

b) ν étant fixé tel que $\dfrac{x}{p^\nu} \geqslant 1$ i.e. $\nu \leqslant \nu_p(x)$ il y a $\left[\frac{x}{p^\nu}\right]$ valeurs de n possibles et donc en tout $\displaystyle\sum \left[\frac{x}{p^\nu}\right] = i_p$ couples.

c) $\Phi \circ \Psi(x) = \displaystyle\sum_{n \leqslant x} \sum_{k \leqslant \frac{x}{n}} \Lambda(k) = \sum_{n \leqslant x} \sum_{p^\nu \leqslant \frac{x}{n}} \ln p$. p étant fixé, il y a autant de $\ln p$ que de couples (n, ν) tels que $n \leqslant x$et $p^\nu \leqslant \frac{x}{n}$ i.e. tels que $np^\nu \leqslant x$ donc $i_p(x)$. Ainsi

$$\varphi \circ \Psi(x) = \sum i_p(x) \ln p = \ln \prod p^{i_p(x)} = \ln[x]!.$$

PARTIE III

1° $|f(x)| \leqslant \displaystyle\sum H\left(\frac{x}{n}\right)^\beta = Hx^\beta \sum_1^x \frac{1}{n^\beta} \leqslant Hx^\beta\left(1 + \int_1^x \frac{dt}{t^\beta}\right) = Hx^\beta\left(1 + \frac{x^{1-\beta} - 1}{1 - \beta}\right) = \frac{Hx}{1-\beta} - \frac{H\beta x^\beta}{1-\beta}$.

2° a) $\Phi(f_0) = \Phi(f) - b\Phi(x) - c\Phi(1)$ or $\Phi(1) = [x]$. $\Phi(x) = xU(x)$, et $\Phi(f_0) = F - bxU(x) - c[x]$.

On fait maintenant arriver les quantités désirées. $F - Bx\ln x - Cx - bx(U(x) - \ln x - \gamma) - c[x] + x\ln x(B - b) + x(C - b\gamma)$; donc si l'on pose $b = B$ et $c = C - B\gamma$, on obtient un majorant en$Kx^\beta + \dfrac{2\,|b|}{x} + |c|$ car $x - [x] \leqslant 1$. Ce majorant est bien de la forme voulue puisque $x^\beta > \frac{1}{x}$ et $x \geqslant 1$.

b) On a donc $|f_0| \leqslant \dfrac{H\,x}{1-\beta}$ soit $|f(x)| \leqslant \frac{H\,x}{1-\beta} + |bx + c| \leqslant H_1 x$ $(x \geqslant 1)$.

3° D'après I2c) pour tout β on a $\dfrac{1 + 2\ln x}{x^\beta}$ tend vers 0 et donc est majoré. On prend $B = 1, C = -1$ et l'on peut appliquer laquestion précédente avec $f = \Psi$ $|\Psi| \leqslant H_1 x$ fournit le résultat.

4° a) C'est immédiat car $\left|\sum\right| \leqslant \sum \left|F_0\left(\dfrac{x}{n}\right)\right| \leqslant Hx^\beta \displaystyle\sum^{\eta x} \frac{1}{n^\beta} \leqslant Hx^\beta\left(1 + \int_1^{\eta x} \frac{dt}{t^\beta}\right) \leqslant \frac{Hx\eta^{1-\beta}}{1-\beta}$.

b) On a $|\sum| \leqslant |\sum F| + |\sum F_1|$ où les suites $F\left(\frac{x}{n}\right)$ et $F_1\left(\frac{x}{n}\right)$ sont décroissantes d'où d'après I1°

$$\left|\sum F\right| \leqslant 2\,\mathrm{Sup}\,\left(F\left(\frac{x}{[\eta x] + 1}\right); F\left(\frac{x}{[x]}\right)\right) \underset{\eta x \leqslant n \leqslant x}{\mathrm{Sup}} |M(n)|$$

et pareillement avec F_1. η étant fixé, $F\left(\dfrac{x}{[\eta x]+1}\right) \leqslant H\left(\dfrac{x}{[\eta x]}\right)^{\beta} \leqslant K'x$ et $F\left(\dfrac{x}{[x]}\right) \leqslant F(1)$; idem avec F_1.

Finalement $\left|\sum F\right| \leqslant K''\, x \sup\limits_{\eta x \leqslant n \leqslant x} |M(n)|$. Comme ηx tend vers ∞ avec x, $\operatorname{Sup} |M(n)|$ tend vers 0 et on peut le majorer par εx pour x assez grand.

Ainsi en choisissant η pour que $\dfrac{H\,\eta^{1-\beta}}{1-\beta} < \varepsilon$ on aura bien $|f_0| = o(x)$ au voisinage de $+\infty$.

c) On applique ce résultat à $\Phi(\Psi) - \Phi(x)$ qui sont toutes deux croissantes ($= \ln[x]!$ et $-xU(x)$) on a donc $\Psi(x) - x = o(x)$.

5° a) Dans Λ il apparaît autant de fois $\ln p$ qu'il y a de puissance de $p \leqslant x$ soit $p^{\nu} \leqslant x$ soit $\left[\dfrac{\ln x}{\ln p}\right]$ d'où l'expression.

b) Mais on peut aussi dire : autant que de $p \leqslant x^{1/\nu}$ et ceci pour un certain ν qui est donc $\leqslant \frac{[\ln x]}{\ln 2}$ ce qui donne l'égalité demandée.

6° a) C'est stupide !La première inégalité est obtenue pour $k = 1$ et l'autre parce que dans Ψ il y a au plus $\pi(x)$ termes tous $\leqslant \ln x$.

b) On a $\theta(x) \geqslant \sum_y^x \ln p \geqslant \ln y(\pi(x) - y)$.

c) $\ln^2 x \geqslant 1$ et $x \geqslant \ln x$ donc $1 \leqslant f(x) \leqslant x$.

d) $\dfrac{\ln x - 2\ln\ln x}{\ln x}$ tend vers 1 car $\ln\ln x = o(\ln x)$ en $+\infty$. $\dfrac{f(x)\ln x}{x} = \dfrac{1}{\ln x}$ tend vers 0.

7° On a d'abord $\pi(x)\ln x \geqslant \Psi(x) = x + o(x)$ donc $\dfrac{\pi(x)\ln x}{x} \geqslant 1 + o(1)$ qui tend vers 1.

Ensuite avec $y = f(x)$ on obtient $\Psi(x) \geqslant \pi(x)\ln f(x) - f(x)\ln f(x)$ soit

$$\frac{\pi(x)\ln x}{x} \leqslant \frac{\Psi(x)}{x}\,\frac{\ln x}{\ln f(x)} + f(x)\frac{\ln x}{x}$$

où le premier terme tend vers 1 comme les deux quotients et le second vers 0.