Prouver que $\dfrac{1}{\varphi(n)}\displaystyle\sum_{k\wedge n=1} f\left(\frac{k}{n}\right)$ tend vers $\displaystyle\int_0^1 f$.

On pose $R(n)=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_1^n f\left(\frac{k}{n}\right)$. On a donc $R(n)\longrightarrow\int_0^1 f$. On pose aussi $S(n)=\frac{1}{\varphi(n)}\sum_{k\wedge n=1} f\left(\frac{k}{n}\right)$.
En regroupant les entiers par pgdc avec n on a les égalités

$$nR(n)=\sum_{d|n}\sum_{k\wedge n=d}=\sum_{d|n}\sum_{\frac{k}{d}\wedge\frac{n}{d}=1} f\left(\frac{k/d}{n/d}\right)=\sum_{d|n}\sum_{d\wedge\frac{kd}{n}=1} f\left(\frac{kd/n}{d}\right)$$

obtenu en sommant par rapport à d/n ; soit finalement

$$nR(n)=\sum_{d|n}\sum_{k\wedge d=1} f\left(\frac{k}{n}\right)=\sum_{d|n}\varphi(d)S(d)$$

Par conséquent : $\varphi(n)S(n)=\displaystyle\sum_{d|n} dR(d)\mu(\frac{n}{d})$ soit

$$S(n)=\frac{1}{\varphi(n)}\sum_{d|n} R(d)d\mu(\frac{n}{d})$$

Compte tenu de la relation $\varphi(n)=\sum_{d|n} d\mu(\frac{n}{d})$ on est dans la situation d'une convergence en moyenne : $u_k\longrightarrow L$, $v_n=\sum_1^n u_k a_{nk}$ avec $\sum_1^n a_{nk}=1$. Ici $a_{nk}=k\mu\left(\frac{n}{k}\right)$ si $k|n$ et $a_{nk}=0$ sinon.
On peut tenter une preuve "à la Césaro" en posant $u_k=L+\varepsilon_k$ avec $\varepsilon_k\longrightarrow 0$ et l'on se ramène au même problème avec la suite ε_k. Pour n assez grand ($>N$), $|\varepsilon_k|<\varepsilon$. On coupe la somme en deux. On montrerait que $\varphi(n)$ tend vers $+\infty$ et que $\sum_N^n |a_{nk}|$ est borné.
Il suffit donc de prouver que $\frac{1}{\varphi(n)}\sum|d\mu(\frac{n}{d})|$ est borné. Pour cela on ne considère que les diviseurs de n tel que n/d soit de la forme $p_a\cdots p_b$ où les $p_1,\ldots,p_r$ sont les premiers qui divisent n.
$\frac{1}{\varphi(n)}\sum d=\frac{n}{\varphi(n)}\sum\frac{d}{n}=\frac{n}{\varphi(n)}\sum\frac{1}{p_i\cdots p_j}$ mais on peut séparer cette somme Σ_1 en deux en considérant les termes qui contiennent p_r et les autres.

$$\Sigma_1=\sum_{j<r}\frac{1}{p_i\cdots p_j}+\frac{1}{p_r}\sum_{j<r}\frac{1}{p_i\cdots p_j}=\left(1+\frac{1}{p_r}\right)\sum_{j<r}\frac{1}{p_i\cdots p_j}=\prod_1^r\left(1+\frac{1}{p_i}\right)$$

Comme $\varphi(n)=n\prod(1-\frac{1}{p_i})$ on est ramené à borner $\displaystyle\prod\frac{1+1/p_i}{1-1/p_i}$, puis $\sum\ln\frac{1+1/p_i}{1-1/p_i}$ malheureusement le terme général de cette série équivaut à $\frac{2}{p_i}$ qui est une série divergente !
Mais nous avons des renseignements concernant ε_k car pour f continue $R(n)-\int_0^1 f=O(\frac{1}{n})$ et donc $|\varepsilon_k|\leqslant M/k$.
$\left|\displaystyle\sum_N^n\varepsilon_d d\mu(\frac{n}{d})\right|\leqslant M\displaystyle\sum_1^n\left|\mu(\frac{n}{d})\right|$ Cette somme contient 2^r termes (ensemble des parties de $\{p_1,\ldots,p_r\}$) et vaut donc 2^r. On a ensuite $1-1/p>1/2$ et donc

$$\frac{2^r}{\varphi(n)}=\frac{2^r}{n\prod(1-1/p_i)}\leqslant\frac{1}{n}.$$

Il reste à prouver que $\varphi(n)$ tend vers $+\infty$. Soit donc A fixé ; si pour tout $p|n$ premier on a $p^{v_p(n)}<A$ alors $n<A^r$ où r est le nombre de nombre premiers $<A$ donc aussi le nombre maximum de premiers pouvant diviser n (car $v_p\geqslant 1$). Ainsi pour n assez grand, $\exists\, p$ premier tel que $p^{v_p(n)}>A$ et donc $\varphi(n)\geqslant p^{v_p}\left(1-\frac{1}{p}\right)\geqslant p^{v_p}\frac{1}{2}\geqslant\frac{A}{2}$.