ÉLÉMENTS DE TOPOLOGIE MÉTRIQUE

1 Espace métrique

1.1 Distance

Définition 1 : On nomme distance sur un ensemble E une application $d : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}^+$ vérifiant
i) $d(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$; (Séparation)
ii)$d(x,y) = d(y,x)$; (Symétrie)
iii) $d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(y,z)$ (Inégalité triangulaire).

Exemple 1.1 : L'application d définie par

$$d(x,x) = 0 \quad \text{et} \quad d(x,y) = 1 \quad \text{si} \quad x \neq y$$

est une distance (dite distance discrète).
Exemple 1.2 : Sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $d(x,y) = |x - y|$ est une distance.
Exemple 1.3 : Sur $\mathbb{R}^n$ et $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$

$$d_1(x,y) = \sum_1^n |x_i - y_i|\,, \quad d_2(x,y) = \sqrt{\sum_1^n |x_i - y_i|^2}, \quad d_\infty(x,y) = \text{Sup}\ |x_i - y_i|$$

sont des distances.

Exemple 1.4 : Sur $\mathcal{C}^0([a,b])$,

$$d_\infty(f,g) = \underset{[a,b]}{\text{Sup}}\ |f - g| \quad \text{et} \quad d_1(f,g) = \int_a^b |f - g|$$

sont des distances.
Exercice : Montrer que si d est une distance sur E alors $\text{Inf}\ (d,1)$ et $\dfrac{d}{1+d}$ sont des distances.

1.2 Vocabulaire

Définition 2 : Si $A \subset E$ est une partie de E, on nomme distance de x à A $d(x,A) = \underset{y \in A}{\text{Inf}}\ d(x,y)$.

Comme toujours pour des bornes, cette distance n'est pas en général atteinte.

Définition 3 : Pour $a \in E$ et $r \in \mathbb{R}^+$, on nomme :
Boule ouverte de centre a de rayon r

$$B_o(a,r) = \{x \in E \;/\; d(x,a) < r\};$$

Boule fermée de centre a de rayon r

$$B_f(a,r) = \{x \in E \;/\; d(x,a) \leqslant r\}.$$

Exemple 1.5 : Si $E = [0,1]$ on a

$$B_o(1,2) = B_o(0,2) = B_f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = B_f(\frac{1}{2}, 1) = E.$$

Ainsi une boule ouverte peut aussi être une boule fermée, ou l'inverse ;
De même, une boule peut avoir plusieurs centres ou plusieurs rayons.

Définition 4 : On nomme diamètre d'une partie A

$$\delta(A) = \text{Sup}\ \left\{d(x,y)\ (x,y) \in A^2\right\}.$$

Définition 5 : Une partie est dite bornée lorsqu'elle est incluse dans une boule.

Propriété 6 : Une partie est bornée si et seulement si elle est de diamètre fini.

1.3 Topologie métrique

Proposition 7 : Si (E,d) est un espace métrique (c'est-à-dire muni d'une distance) on définit une topologie sur E en choisissant comme ouvert les parties $\mathcal{O} \subset E$ telles que

$$\forall\, x \in \mathcal{O},\ \exists\, \rho > 0, \qquad B_o(x,\rho) \subset \mathcal{O}.$$

Exemple 1.6 : Pour $\mathbb{R}$ et sa distance usuelle, on obtient la topologie de l'ordre, et pour $\mathbb{N}$ la topologie discrète (car les points sont ouverts).

Exercice : Montrer que pour une topologie métrique un point est un fermé.

Propriété 8 : Une boule ouverte (resp. fermée) est un ouvert (resp. un fermé).

DEMST : Soit $x \in B_o(a,r)$; si $d(x,y) \leqslant r' = r - d(x,a)$ alors par l'inégalité triangulaire $d(a,y) \leqslant d(a,x) + d(x,y) \leqslant r$ donc $y \in B(a,r)$ et par conséquent $B(x,r') \subset B_o(a,r)$. La boule ouverte est donc ouverte.

Si maintenant $x \notin B_f(a,r)$ et do,nc $d(a,x) > r$ alors si $d(x,y) < d(a,x) - r = r'$ on a par inégalité triangulaire $d(a,y) \geqslant d(a,x) - d(x,y) > r$ donc $B_o(x,r') \subset \complement B_f(a,r)$. Le complémentaire est ouvert et la boule fermée est fermée.

Définition 9 : Deux distances sur E sont dites topologiquement équivalentes, ou simplement équivalentes si elles définissent la même topologie.

Autrement dit les deux topologies ont les mêmes ouverts.

Proposition 10 : d et d' sont deux distances équivalentes sur E si $\forall x \in E$ et $\forall r > 0$, il existe $\rho > 0$ et $\rho' > 0$ tels que

$$B_o(x,\rho) \subset B'_o(x,r) \quad \text{et} \quad B'_o(x,\rho') \subset B_o(x,r).$$

DEMST : $B'_o(x,r)$ est ouverte pour $\mathcal{T}'$ donc aussi pour $\mathcal{T}$ et par conséquent, il existe ρ tel que $B_o(x,\rho) \subset B'_o(x,r)$. Le même argument en échangeant les rôles de $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$ donne l'autre inclusion.

Proposition 11 : S'il existe α et β dans $\mathbb{R}_+^*$ tels que

$$\alpha d \leqslant d' \leqslant \beta d$$

alors d et d' sont équivalentes.

DEMST : $\rho' = \alpha r$ et $\rho = r/\beta$.

Remarque 1.7 : Dans ce cas particulier important, on dit que les distances sont u-équivalentes le "u" signifiant "uniformément".

Nous en verrons plus tard la raison.

Exemple 1.8 : Sur $\mathbb{R}^n$, les distances d_1, d_2, d_∞ sont équivalentes. On a en effet $d_\infty \leqslant d_1 \leqslant n d_\infty$, $d_\infty \leqslant d_2 \leqslant \sqrt{n} d_\infty$, et avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz $\frac{1}{\sqrt{n}} d_2 \leqslant d_1 \leqslant n d_2$

Lorsque l'on dispose d'une famille finie d'espaces métriques (E_i, d_i), on peut définir une distance sur $\prod E_i$ par $d_1 = \sum_1^n d_i$, $d_\infty = \text{Sup } d_i$.

Propriété 12 : Si $(E_i, d_i)_I$ est une famille d'espaces métriques, alors la topologie produit sur l'espace produit $\prod\limits_I E_i$ peut être définie par la distance d_∞ (ou tout autre distance t-équivalente).

Remarque 1.9 : Lorsqu'on veut faire distingué on dit "La topologie produit est métrisable" c'est-à-dire qu'elle peut être définie par une distance.

2 POINTS PARTICULIERS

2.1 VOISINAGE D'UN POINT

Dans le cas des espaces métriques, la définition de voisin,age se traduit par $\exists\, r > 0, \quad B_o(x,r) \subset V$.

Lorsque $E = \mathbb{R}$ on retrouve la définition des voisinages vues en 1ere.

Une propriété essentiel est

Propriété 1 : Une topologie métrique est séparée.

DEMST : Si $d(x,y) = r \neq 0$, les boules $B_o(x, \frac{r}{2})$ et $B_o(y, \frac{r}{2})$ sont disjointes.

2.2 POINTS INTÉRIEURS

Dans le cas des espaces métriques, un point est intérieur à A lorsqu'il existe $r > 0$ tel que $B_o(x,r) \subset A$.

On rappelle que l'intérieur d'une partie noté $\overset{\circ}{A}$ est le plus grand ouvert inclus dans A.

Remarque 2.1 : On a seulement $B_o(x,r) \subset \overset{\circ}{B}_f(x,r)$ et pas égalité en général ; il suffit pour s'en convaincre de prendre $E = [0,1] \cup \{2\}$ et d'examiner la boule $B_f(1,1)$.

2.3 POINTS ADHÉRENTS

La notion de point adhérent ($x \in \overline{A}$) devient $\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, x \in A \qquad d(x,a) < \varepsilon$.

Un point de $a \in A$ est dit isolé s'il possède un voisinage $\mathcal{V}$ tel que $\mathcal{V} \cap A = \{a\}$.

Un point est dit point d'accumulation de A si tout voisinage contient une infinité de points de A.

Rappelons :

Propriété 2 : $\overline{A}$ est le plus petit fermé contenant A.

Remarque 2.2 : Lorsque $\overline{A} = E$ on dit que A est dense dans E.
Exemple 2.3 : $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
Exemple 2.4 : Le cas $E = [0,1] \cup \{2\}$ et $B_o(1,1)$ prouve qu'en général, on a simplement $\overline{B_o(x,r)} \subset B_f(x,r)$.

3 LIMITES ET CONTINUITÉ

3.1 LIMITES

Définition 1 : Etant donné $f : A \longrightarrow F$ et $a \in \overline{A}$, on dit que f a pour limite $l \in F$ en a si

$$\forall\, W \in \mathcal{V}(l),\ \exists\, V \in \mathcal{V}(a), \qquad f(A \cap V) \subset W.$$

Remarque 3.1 : Cela se traduit

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \alpha > 0, \qquad \forall\, x \in A, d(x,a) < \alpha \Longrightarrow d'(f(x), l) < \varepsilon.$$

Propriété 2 : Dans un espace métrique, une limite lorsqu'elle existe, est unique.

DEMST : Cela résulte de la séparation.

3.2 APPLICATIONS CONTINUES

Définition 3 : On dit que $f : E \longrightarrow F$ est continue en a si
$$\forall W \in \mathcal{V}\big(f(a)\big), \qquad f^{-1}(W) \in \mathcal{V}(a).$$

Remarque 3.2 : En topologie métrique cela se traduit par
$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \qquad d(x,a) < \alpha \Longrightarrow d'\big(f(x), f(a)\big) < \varepsilon.$$

Proposition 4 : f est continue en a si et seulement si
$$\lim_a f(x) = f(a).$$

Exemple 3.3 : $GL_n(\mathbb{R})$ est un ouvert car image réciproque de $\mathbb{R}^*$ par le déterminant qui est une application continue puisque dans une base elle s'écrit comme un polynôme.

3.3 CONTINUITÉ UNIFORME

Définition 5 : On dit que $f : E \longrightarrow F$ est uniformément continue sur E si
$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \qquad d(x,y) < \alpha \Longrightarrow d'\big(f(x), f(y)\big) < \varepsilon.$$

Remarque 3.4 : Deux distance u–équivalente ont les mêmes applications uniformément continues.

Définition 6 : On dit que $f : (E,d) \longrightarrow (F, f')$ est k-lipschitzienne si
$$d'\big(f(x), f(y)\big) \leqslant k d(x,y).$$

Propriété 7 : f lipschitzienne $\Longrightarrow$ f u-continue $\Longrightarrow$ f continue.

4 SUITES DANS UN ESPACE MÉTRIQUE

4.1 LIMITE D'UNE SUITE

Définition 1 : Une suite d'éléments de E est une application de $\mathbb{N}$ dans E et l'on dit qu'elle converge vers l si elle tend vers l en $+\infty$ (au sens précédent des limites).

Propriété 2 : Une suite qui converge est bornée.

DEMST : Si $\ell = \lim u_n$ on a pour n assez grand, $n > N$, $d(u_n, l) < 1$ auquel cas $\forall n, u_n \in B(\ell, R)$ où $R = \operatorname{Sup}(\{1, d(\ell, u_k), \ k \leqslant N\}$.

4.2 INTERETS DANS UN ESPACE MÉTRIQUE

Dans les espaces métriques, l'utilisation des suites simplifie notablement de nombreuse preuves.

Proposition 3 : On a $a \in \overline{A}$ si et seulement si a est limite d'une suite de points de A.

DEMST : Tout voisinage de a contient tous les termes de u_n à partir d'une certain rang donc des points de A et donc est adhérent à A.

Réciproquement, si $a \in \overline{A}$, alors pour tout n, il existe $u_n \in A$ tel que $d(a, u_n) < \frac{1}{n}$. On a ainsi définit une suite (u_n) dont la limite est évidemment a.

Remarque 4.1 : En toute rigueur, la preuve précédente utilise l'axiome du choix lorsqu'elle considère globalement l'ensemble de ces choix pour définir une suite $u = (u_n)$.

Corollaire 1 : Une partie A est fermée si et seulement si toute suite d'éléments de A qui converge a sa limite dans A.

DEMST : Si A est fermé, $\lim a_n \in \overline{A} = A$. Réciproquement si $a \in \overline{A}$, il existe une suite de A telle que $a = \lim u_n$ qui est dans A par hypothèse.

Exemple 4.2 : Si E désigne l'ensemble des fonctions bornées sur $[a,b]$ muni de la distance d_∞, alors l'ensemble des fonctions continues sur $[a,b]$ est un fermé. Nous en verrons la preuve plus loin

Proposition 4 : f est une application continue en a si et seulement si pour toute suite (x_n) tendant vers a on a $\lim f(x_n) = f(a)$.

DEMST : $\varepsilon > 0$ étant fixé, il existe α tel que
$$d(x,a) < \alpha \Longrightarrow d(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$
Il existe ensuite N tel que $n > N$, $d(a, u_n) < \alpha$ d'où $d(f(u_n), f(a)) < \varepsilon$.

4.3 VALEURS D'ADHÉRENCE

Définition 5 : a est une valeur d'adhérence de la suite (x_n) si tout voisinage de a contient une infinité de termes de la suite.

Remarque 4.3 : Dans un espace métrique cela s'écrit
$$\forall \varepsilon > 0, \ , \forall N, \ \exists n > N, \qquad d(x_n, a) < \varepsilon.$$

Définition 6 : On dit qu'un e suite v_n est extraite de la suite u_n ou que c'est une sous-suite de la suite u_n, lorsqu'il existe une application strictement croissante $\varphi \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ telle que $\forall n$, $v_n = u_{\varphi(n)}$.

Proposition 7 : L'ensemble des valeurs d'adhérence d'une suite coincide avec l'ensemble des limites de ses suites extraites convergentes.

DEMST : Si $a = \lim u_{\varphi(n)}$ tout voisinage de a contient tous les termes de $u_{phi(n)}$ à partir d'un certain rang donc une infinité de termes de u_n.

Soit maintenant a une valeur d'adhérence de u_n. Il existe u_k tel que $d(u_k, a) < 1$. Notons $\varphi(1)$ le plus petit de ces k. Supposons ensuite avoir construit $phi(1) < \cdots < \varphi(n-1)$ tels que $d(u_{\varphi(k)}, a) < \frac{1}{k}$. Il existe $k > \varphi(n-1)$ tel que $d(a, u_k) < \frac{1}{n}$. On note $\varphi(n)$ le plus petit de ces k. On a alors définit une suite extraite $u_{\varphi(n)}$ convergeant vers a.

Remarque 4.4 : Contrairement à la démonstration précédente, celle-ci n'utilise pas l'axiome du choix car la construction du terme $u_{\varphi(n)}$ est explicite.

Propriété 8 : Toutes les suites extraites d'une suite convergente sont convergentes et convergent vers la limite de la suite

DEMST : Par croissance de φ, $n > N \implies \varphi(n) > \varphi(N) \geqslant N$ donc $\forall n > N$, $d(\ell, u_{\varphi(n)}) < \varepsilon$.

5 Espace complet

5.1 Suites de Cauchy

Définition 1 : Dans un espace métrique (E, d), une suite (x_n) est dite de Cauchy si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N,\ \forall p, q > N, \qquad d(x_p, x_q) < \varepsilon.$$

Remarque 5.1 : Deux distance u–équivalentes ont les mêmes suites de Cauchy.

Propriété 2 : Une suite de Cauchy est bornée.

DEMST : Pour tout $p, q > N$ on a $|x_p - x_q| < 1$ et donc tous les termes à partir de N sont dans la boule $B(x_{N+1}, 1)$ à un nombre fini de termes près.

Propriété 3 : Toute suite convergente est de Cauchy.

DEMST : Pour un ε fixé on a pour $n > N$ $d(x_n, l) < \varepsilon$ d'où $d(x_p, x_q) \leqslant d(x_p, l) + d(x_q, l) < 2\varepsilon$ pour tout $p, q > N$.

Propriété 4 : Une suite de Cauchy qui admet une valeur d'adhérence converge.

DEMST : Soit a cette valeur d'adhérence. $\varepsilon > 0$ étant donné, il existe N tel que $p, q > N \implies d(x_p, x_q) < \varepsilon$. Mais il existe $p > N$ tel que $d(x_p, a) < \varepsilon$ d'où $d(x_q, a) \leqslant d(x_q, x_p) + d(x_p, a) < 2\varepsilon$ et ceci $\forall q > N$.

5.2 Espace complets

Définition 5 : Un espace métrique (E, d) est dit complet si toute suite de Cauchy converge.

Exemple 5.2 : Munis de la distance usuelles, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{Z}$ sont complets. En revanche $\mathbb{Q}$ ne l'est pas c'est même l'une des motivation de construire $\mathbb{R}$.

Exemple 5.3 : L'ensemble des fonctions continues sur $[a, b]$ muni de la distance uniforme est complet.Nous démontrerons plus tard ces propriétés.

Proposition 6 : Toute partie fermé d'un espace complet est complète.

DEMST : En effet toute suite de Cauchy de F converge dans E mais comme F est fermé, la limite est dans F.

Proposition 7 : Un produit fini d'espaces métriques complets muni de la distance d_1, d_2 ou d_∞ est complet.

DEMST : Nous utiliserons d_∞.

Soit donc (E_k, d_k) des espace métriques complets et $E = \prod_1^n E_k$. Soit $X_n \in E$ une suite de Cauchy de E ; on pose $X_p = (x_1^p, \dots, x_n^p)$. On a pour $p, q > N$ $d_\infty(X_p, X_q) = \operatorname{Sup}_k d_k(x_k^p, x_k^q) < \varepsilon$ soit $\forall k \leqslant n$, (1) $\quad d_k(x_k^p, x_k^q) < \varepsilon$ donc pour k fixé, les suites (x_k^p) est de Cauchy donc converge. Soit a_k sa limite. Par passage à la limite selon q dans l'inégalité (1) on tire $\forall k$ $d(x_k^p, a_k) < \varepsilon$ et par conséquent $\operatorname{Sup}_k d(x_k^p, a_k) < \varepsilon$ d'où $d_\infty(X_p, A) < \varepsilon$ où $A = (a_1, \dots, a_n)$.

Exemple 5.4 : C'est ainsi que $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$ sont complets.

5.3 Intérets des espaces complets

Théorème 8 : (Des fermés emboités) Soit (E, d) un espace complet et (F_n) une suite de fermés emboités non vides de diamètre tendant vers 0 ;

$$\bigcap_{\mathbb{N}} F_n \neq \varnothing.$$

DEMST : Soit $x_n \in F_n$. On considère la suite (x_n). Soit $\varepsilon > 0$, il existe N tel que $diam F_N < \varepsilon$. Les fermés étant emboîtés, $\forall p, q > N$, $x_p, x_q \in F_N$ et donc $d(x_p, x_q) \leqslant diam F_N < \varepsilon$. ? La suite (x_n) est de Cauchy donc converge ; notons a sa limite. Comme $\forall n \geqslant p$, $x_n \in F_p$ on a $\lim x_n = a \in F_p$ et ceci pour tout p. $a \in \bigcap F_p$.

Remarque 5.5 : on a bien entendu reconnu le théorème des segments emboîtés de $\mathbb{R}$. La structure très particulière de $\mathbb{R}$ à savoir sa topologie de l'ordre a permis d'en donner une preuve élémentaire n'utilisant que les suites adjacentes c'est-à-dire le théorème de la limite monotone.

Théorème 9 : (Du point fixe) Soit (E, d) un espace complet et $f : E \longrightarrow E$ une application contractante (i.e. lipschitzienne de rapport < 1) ; f admet un point fixe unique.

DEMST : Soit $a_0 = a \in E$ et $a_n = f(a_{n-1})$. On a $d(a_{n+1}, a_n) \leqslant kd(a_n, a_{n-1}) \leqslant$

$k^n d(a_0,a_1)$. Puis

$$d(a_{p+q},a_p) \leqslant \sum_0^{q-1} d(a_{p+k},a_{p+k+1}) \leqslant d(a_0,a_1)\sum_0^{q-1} k^{p+k} = \frac{k^p-k^{p+q}}{1-k}d(a_0,a_1)$$
$$\leqslant \frac{k^p}{1-k}d(a_0,a_1).$$

Comme $k<1$, pour p assez grand et q quelconque, on aura $d(a_{p+q},a_p)<\varepsilon$. la suite est de cauchy donc convergente. Soit $u=\lim a_n$, par passage à la limite $f(u)=u$. De surcroît u est unique car si v est un autre point fixe, $d(u,v)=d(f(u),f(v))\leqslant kd(u,v)$ ce qui est absurde.

Ce théorème est certainement l'un des plus important de l'analyse fonctionnelle.

Théorème 10 : (Critère de Cauchy) Soit E,F deux complets et $f:\mathcal{D}\longmapsto F$.
f admet une limite en un point d'accumulation a de $\mathcal{D}$
$\forall\,\varepsilon>0,\ \exists\,\alpha>0,\ \forall\,x,y,\ d(a,x)<\alpha,\ d(a,y)<\alpha,\ d\big(f(x),f(y)\big)<\varepsilon.$

DEMST : Si f admet pour limite l, alors $\forall\,\varepsilon>0$, $\exists\,\alpha>0$ tel que $d(a,x)<\alpha \Longrightarrow d(f(x),l)<\varepsilon$ d'où $d(f(x),f(y))\leqslant d(f(x),l)+d(f(y),l)<2\varepsilon$.

Réciproquement, on prend $\varepsilon=\frac{1}{n}$ d'où $\alpha_n>0$ qu'on peut choisir $<\alpha_{n-1}$. On choisit ensuite un x_n, $d(x_n,a)<\alpha_n$ (il existe puisque a est un point d'accumulation de $\mathcal{D}$). Si $N>\frac{1}{\varepsilon}$ et $p>q>N$ alors $d(x_p,a)<\alpha_p$ et $d(x_q,a)<\alpha_q<\alpha_p$; par conséquent $d(f(x_p),f(x_q))<\frac{1}{p}<\varepsilon$. La suite $f(x_n)$ est donc de cauchy. Soit $l=\lim f(x_n)$.

Pour tout $\varepsilon>$, il existe N_1, $\forall\,n>N_1$ $d(f(x_n),l)<\varepsilon$. Soit ensuite $N_2>\frac{1}{\varepsilon}$ et $N=\text{Sup}\,(N_1,N_2)$. On aura alors $\frac{1}{N}<\varepsilon$, $d(a,x_N)<\alpha_N$ et pour $d(x,a)<\alpha_N$

$$d(f(x),l)\leqslant d(f(x),f(x_N))+d(f(x_N),l)<\frac{1}{N}+\varepsilon<2\varepsilon.$$

6 Espaces Compacts

Propriété 1 : Dans un espace métrique, un compact est fermé et borné.

DEMST : K est fermé comme dans tout espace séparé. $K\subset\bigcup_{x\in K}B(x,1)$. de ce recouvrement on peut extraire un sous-recouvrement par un nombre fini de boules ouvertes. et K est dans une partie bornée.

Remarque 6.1 : La réciproque est malheureusement fausse en général.

6.1 Compacité et suites

Théorème 2 : (Bolzano-Weierstrass) Dans un espace métrique une partie est compacte si et seulement si toute suite admet une valeur d'adhérence (ou une suite extraite convergente).

DEMST : Soit (x_n) une suite dans un compact K. $\bigcap_{p\in\mathbb{N}}\overline{\{x_n,\ n\geqslant p\}}\neq\varnothing$ car il s'agit d'une suite décroissante de fermés non vides. Si a est dans cette intersection, on aura pour $\varepsilon>0$ fixé et N, $a\in\overline{\{x_n,\ n\geqslant N\}}$ et donc un x_n, $n\geqslant N$ tel que $d(a,x_n)<\varepsilon$. a est donc une valeurs d'adhérence.

Réciproquement soit $\mathcal{O}_i$ un recouvrement par des ouverts. Nous commençons par prouver par l'absurde l'existence d'un ε de Lebesgue. C'est-à-dire

$$\exists\,\varepsilon>0,\ \forall\,x\in E,\ \exists\,i\in I,\ B(x,\varepsilon)\subset\mathcal{O}_i.$$

On raisonne par l'absurde et il existe x_n tel que $\forall\,i\in I$, $B(x_n,\frac{1}{n})\not\subset\mathcal{O}_i$. La suite (x_n) admet une valeur d'adhérence a, et il existe une suite extraite $x_{\varphi(n)}$ dont la limite est a. a est dans un certain ouvert $\mathcal{O}_j$ et donc il existe $\eta>0$, $B(a,\eta)\mathcal{O}_j$. Prenons ensuite N tel que $n>N\Longrightarrow d(a,x_{\varphi(n)})<\frac{\eta}{2}$ puis $\frac{1}{n}<\frac{\eta}{2}$ avec $n>N$. On a alors $B(x_{\varphi(n)},\frac{1}{\varphi(n)})\subset B(a,\eta)\subset\mathcal{O}_j$ ce qui contredit l'hypothèse.

Si l'on ne pouvait pas recouvrir E par un nombre fini de boules $B(x,\varepsilon)$ et donc par un nombre fini de $\mathcal{O}_i$, on pourrait construire de proche en proche une suite x_n tel que $\forall\,n,\ x_n\notin\bigcup_1^{n-1}B(x_k,\varepsilon)$. Mais alors $d(x_p,x_q)>\varepsilon$. la suite x_n non seulement n'est pas de Cauchy mais n'admet aucune sous-suite qui le soit et par conséquent aucune sous-suite convergente ce qui contredit l'hypothèse.

Remarque 6.2 : ce théorème simplifie notablement les démonstrations de compacité dans les cas métriques. Pr exemple...

Corollaire 1 : Un produit fini d'espaces métriques compacts est compact.

DEMST : On le fait avec deux. Soit $y_n=(x_n,x'_n)$ une suite de $K\times K'$. de la suite (x_n) on extrait une sous-suite convergente $x_{\varphi(n)}$ convergente de limite $a\in K$;. Puis de $x'_{\varphi(n)}$ on extrait $x'_{\varphi(\psi(n))}$ convergeant vers $a'\in K'$. Comme la suite $x_{\varphi(\psi(n))}$ est extraite de $x_{\varphi(n)}$ elle est également convergente de limite a. Il en résulte que la suite $y_{\varphi(\psi(n))}$ converge vers (a,a').

Corollaire 2 : Tout espace métrique compact est complet.

Exemple 6.3 : Si les parties fermées bornées sont compactes, l'espace est complet.

6.2 Compact de $\mathbb{R}$

Théorème 3 : (Borel-Lebesque) Un intervalle fermé borné $[a,b]$ est une partie compacte.

DEMST : Soit $[a,b]\subset\bigcup\mathcal{O}_i$ et $A=\{x,\ [a,x]$ est recouvert par un nombre fini de $\mathcal{O}_i\}$.

$a\in A$ et A est majoré. Soit $\beta=\text{Sup}\ A$. $\exists\,\mathcal{O}_{i_0}$ contenant β donc aussi un intervalle $]\beta-\varepsilon,\beta+\varepsilon[$ pour un $\varepsilon>0$ mais alors $\exists\,\alpha\in A$, $\beta-\varepsilon<\alpha\leqslant\beta$ $[a,\alpha]\subset\bigcup_J\mathcal{O}_i$ où J est fini. On a alors $[a,\beta+\frac{\varepsilon}{2}]\subset\bigcup_J\mathcal{O}_i\cup\mathcal{O}_{i_0}$ donc si $\beta\neq b$, $\beta+\frac{\varepsilon}{2}\in A$ contradiction en prenant ε assez petit pour que $\beta+\frac{\varepsilon}{2}\in[a,b]$.

Corollaire 1 : Les compacts de $\mathbb{R}$ sont les parties fermées et bornées.

DEMST : Un compact est fermé et borné et réciproquement un fermé borné est fermé dans un intervalle $[a, b]$ donc dans un compact et par conséquent lui aussi compact.

Corollaire 2 : Les compacts de $\mathbb{R}^n$ sont les parties fermées et bornées.

DEMST : Preuve identique à la précédente puisque'ici un pavé $\prod[a_i, b_i]$ est compact.

7 COMPACITÉ ET CONTINUITÉ

Théorème 1 : L'image d'un compact par une application continue est un compact.

DEMST : Soit K un compact et f continue. Si $f(K) \subset \bigcup \mathcal{O}'_i$ alors $K \subset \bigcup f^{-1}(\mathcal{O}'_i)$ qui sont ouverts. il existe donc un sous-recouvrement fini $K \subset \bigcup_J f^{-1}(\mathcal{O}'_i)$ d'où $f(K) \subset \bigcup_J \mathcal{O}'_i$.

Corollaire 1 : Une fonction numérique définie sur une partie fermée bornée de $\mathbb{R}$ est bornée et atteint ses bornes.

DEMST : Un partie fermé borné étant compacte, son image l'est aussi donc est bornée et contient ses bornes (puisque fermé) celles-ci sont donc atteinte.

Théorème 2 : (Heine-1872) Une fonction continue sur un espace métrique compact est uniformément continue.

DEMST : On raisonne par l'absurde.

$$\exists\, \varepsilon > 0,\ \forall\, n,\ \exists\, x_n, y_n, \quad d(x_n, y_n) < \frac{1}{n}, \quad d(f(x_n), f(y_n)) > \varepsilon.$$

De la suite x_n on extrait $x_{\varphi(n)}$ convergeant vers $x \in K$. Puis de $y_{\varphi(n)}$ on extrait $y_{\varphi(\circ\psi(n)}$ convergeant vers $y \in K$. Il en est alors de même de $x_{\varphi\circ\psi(n)}$.

De $d(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$ on tire par passage à la limite $x = y$. Mais alors on obtient une contradiction en passant à la limite dans $d(f(x_{\varphi\circ\psi(n)}), f(y_{\varphi\circ\psi(n)})) > \varepsilon$.