ÉLÉMENTS DE TOPOLOGIE GÉNÉRALE

1 Espace topologique

1.1 Topologie

Définition 1 : Étant donné une ensemble E, on nomme topologie sur E, une partie $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(E)$ telle que :

i) $\varnothing \in \mathcal{T}$ et $E \in \mathcal{T}$;

ii) $\forall\, I$ et une famille $(O_i)_I$ d'éléments de $\mathcal{T}$, $\bigcup_I \mathcal{O}_i \in \mathcal{T}$.

ou encore : $\mathcal{T}$ est stable par réunions quelconques.

iii) $\forall\, \mathcal{O}, \mathcal{O}' \in \mathcal{T}$, $\mathcal{O} \cap \mathcal{O}' \in \mathcal{T}$. Autrement dit $\mathcal{T}$ est stable par intersection finie.

Exemple 1.1 : Il y a toujours deux topologies extrêmes :
- $\mathcal{T} = \mathcal{P}(E)$; tous les sous-ensembles sont des ouverts. C'est la topologie discrète.
- $\mathcal{T} = \{\varnothing, E\}$ Rien n'est ouvert ! C'est la topologie grossière.

Exemple 1.2 : Dans un ensemble ordonné, on définit les intervalles ouverts comme les parties de la forme

$$]a, b[, \quad]a, \to [\ \text{(section commençante)}, \quad] \leftarrow, a[\ \text{(section finissante)}$$

on peut alors définir une topologie en définissant les ouverts comme les réunions quelconques d'intervalles. C'est la topologie de l'ordre.

Définition 2 : On dira qu'une topologie $\mathcal{T}_1$ est plus fine qu'une topologie $\mathcal{T}_2$ si $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$. Autrement dit : tout ouvert de $\mathcal{T}_1$ est un ouvert de $\mathcal{T}_2$.

1.2 Fermés et voisinages

Définition 3 : Une partie F de E est dite fermée pour la topologie $\mathcal{T}$ si son complémentaire $\complement F$ est un ouvert de $\mathcal{T}$.

Il en résulte que dans tous les cas $\varnothing$ et E sont à la fois ouverts et fermés.

Propriété 4 : Toute intersection de fermés est un fermé.
Toute réunion finie de fermés est un fermé.

Exemple 1.3 : Dans $\mathbb{R}$ un intervalle fermé est fermé. On a en effet

$$\complement[a, b] =] \leftarrow, a[\cup]b, \to [$$

qui est un ouvert en tant que réunion de deux ouverts.

Définition 5 : On dit que V est un voisinage de x s'il existe un ouvert $\mathcal{O}$ tel que

$$\{x\} \subset \mathcal{O} \subset V.$$

Lorsque $E = \mathbb{R}$ on retrouve la définition des voisinages vues en 1ere.

Proposition 6 : L'intersection de deux voisinages de x est un voisinage de x.
Toute partie contenant un voisinage de x est un voisinage de x.

Remarque 1.4 : On note souvent $\mathcal{V}(x)$ l'ensemble des voisinages de x.

Propriété 7 : Une partie de E est ouverte si et seulement si elle est voisinage de chacun de ses points.

Demst : Le sens direct est trivial. réciproquement, tout $x \in \mathcal{O}$ est inclus dans un ouvert $\mathcal{O}_x \subset \mathcal{O}$ de sorte que $\mathcal{O} \subset \bigcup_{x \in \mathcal{O}} \mathcal{O}_x \subset \mathcal{O}$ d'où l'égalité des ensembles, celui du milieu étant ouvert comme réunion d'ouvert.

Définition 8 : On dit qu'une topologie est séparée si deux points de E possèdent des voisinages disjoints.

$$\forall\, x, y \in E,\ x \neq y, \quad \exists\, V_x \in \mathcal{V}(x), \exists\, V_y \in \mathcal{V}(y), \quad V_x \cap V_y = \varnothing.$$

Nous verrons que c'est cette notion qui permet de parler de limite en un point.

Exemple 1.5 : Dans un espace séparé, les points sont fermés.

2 Sous-espace topologique

Lemme 0 : Soit $A \subset E$ et $\mathcal{T}$ une topologie sur E.
L'ensemble $\mathcal{T}_A = \{\mathcal{O} \cap A, \mathcal{O} \in \mathcal{T}\}$ définit une topologie sur A.

Définition 1 : Cette topologie se nomme topologie induite sur A et l'on nommera sous-espace topologique de E une partie de E munie de sa topologie induite.

Propriété 2 : Avec les mêmes notations

i) F' est un fermé pour $\mathcal{T}_A \iff F' = F \cap A$ où F est un fermé de $\mathcal{T}$.

ii) V' est un voisinage de x pour $\mathcal{T}_A \iff V' = V \cap A$ où V est un voisinage de x pour $\mathcal{T}$.

iii) Si $B \subset A \subset E$, alors $\mathcal{T}_B = (\mathcal{T}_A)_B$ (topologie induite par $\mathcal{T}_A$ sur B).

Exemple 2.1 : Si $\mathcal{T}$ est séparée alors $\mathcal{T}_A$ également ;

Si $B \subset A$, alors $\bar{B}_A = \bar{B} \cap A$.

Exemple 2.2 : La topologie induite sur $\mathbb{Z}$ par la topologie usuelle de $\mathbb{R}$ est la topologie discrète.

En effet

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \qquad \{n\} = \mathbb{Z} \cap \left]n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}\right[$$

de sorte que tous les points sont des ouverts et donc la topologie est la discrète.

3 Eléments remarquables

3.1 Intérieur

Définition 1 : Soit $A \subset E$ où E est un espace topologique On dira que a st un point intérieur à A si A est un voisinage de a.

On nomme intérieur de A, ce qu'on note $\overset{\circ}{A}$, l'ensemble des points intérieurs à A.

Propriété 2 : $\overset{\circ}{A}$ est le plus grand ouvert inclus dans A.

Demst : Si $x \in \overset{\circ}{A}$, il existe $\mathcal{O}$ ouvert $x \in \mathcal{O} \subset A$, mais comme $\forall\, y \in \mathcal{O}$, $\{y\} \subset \mathcal{O} \subset A$ A est un voisinage de tout $y \in \mathcal{O}$ donc $\mathcal{O} \subset \overset{\circ}{A}$ et par conséquent $\overset{\circ}{A}$ est un voisinage de x, ceci pour tout x donc est un ouvert.

Réciproquement par définition si $\mathcal{O} \subset A$ alors $\forall\, y \in \mathcal{O}$, on a $\{y\} \subset \mathcal{O} \subset A$, $y \in \overset{\circ}{A}$ et $\mathcal{O} \subset \overset{\circ}{A}$.

Remarque 3.1 : Il en résulte que $\mathcal{O}$ est un ouvert si et seulement si $\overset{\circ}{\mathcal{O}} = \mathcal{O}$.

Propriété 3 : A et B étant deux parties d'une espace topologique, on a :

i) $A \subset B \Longrightarrow \overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$.

ii) $\overset{\circ}{\overset{\circ}{A}} = \overset{\circ}{A}$

iii) $\overset{\circ}{\overbrace{A \cap B}} = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$

iv) $\overset{\circ}{\overbrace{A \cup B}} \supset \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}$.

Demst : $\overset{\circ}{A}$ est un ouvert inclus dans A donc dans B ; or $\overset{\circ}{B}$ est le plus grand ouvert dans B. $\overset{\circ}{\overset{\circ}{A}} \subset \overset{\circ}{A}$ qui est ouvert donc voisinage de tous ses points donc inclus dans $\overset{\circ}{\overset{\circ}{A}}$.

$\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B} \subset A \cap B$ d'où une inclusion ; puis l'autre en utilisant le i).

Exemple 3.2 : Attention au contrexemple du iv) $A = [a, b[$ et $B = [b, c]$.

3.2 Point adhérent-Adhérence

Définition 4 : x est dit adhérent à A lorsque : $\forall\, V \in \mathcal{V}(x), \quad V \cap A \neq \varnothing$.

L'ensemble des points adhérents à A se nomme adhérence de A et se note $\overline{A}$.

Proposition 5 : $\overline{A}$ est le plus petit fermé contenant A.

Demst : Si $x \notin \overline{A}$, il existe un voisinage $V \in \mathcal{V}(x)$ que l'on peut supposer ouvert (car V contient précisément un ouvert contenant x lequel est un voisinage de x) tel que $V \cap A = \varnothing$ donc $V \subset \complement A$. Tout point de V (qui est ouvert) possède un voisinage (V lui-même) ne rencontrant pas A et donc n'est pas adhérent. Ainsi $V \subset \complement\overline{A}$ qui est donc ouvert :$\overline{A}$ est fermé.

Réciproquement : soit F un fermé et $\mathcal{O} = \complement F$. Si $x \notin F$ alors $x \in \mathcal{O}$ or $A \subset F$, $A \cap \mathcal{O} = \varnothing$ donc x n'est pas adhérent à A, $\complement F \subset \complement\overline{A}$ d'où $\overline{A} \subset F$.

Propriété 6 : A et B étant deux parties d'une espace topologique, on a :

i) $A \subset B \Longrightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$.

ii) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$

iii) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

iv) $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.

Demst : Les démonstrations sont en tout point analogues au cas de l'intérieur.

Exercice : Prouver que $\complement\overset{\circ}{A} = \overline{\complement A}$ et que $\complement\overline{A} = \overset{\circ}{\complement A}$

Définition 7 : On nomme frontière de A l'ensemble

$$\overline{A} \cap \overline{\complement A} = \overline{A} - \overset{\circ}{A} = (\overline{A} - A) \cup (\overline{\complement A} - \complement A).$$

Exercice : Prouver que ces ensembles sont bien égaux.

Définition 8 : On dit qu'une partie A est dense dans E si $\overline{A} = E$.

C'est une notion qui n'a l'air de rien mais qui est particulièrement importante et dont nous verrons plusieurs applications.

Définition 9 : Un point de A est dit isolé s'il existe $V \in \mathcal{V}(x)$, $V \cap A = \{x\}$.

Un point est dit d'accumulation si tout voisinage de x rencontre A en un point autre que x.

Il en résulte que tout point adhérent est soit isolé soit d'accumulation.

Propriété 10 : Si la topologie est séparée, un point est d'accumulation si tout voisinage contient une infinité de point de A.

DEMST : On prouve que si un voisinage ne contient qu'un nombre fini de point de A alors $x \in A$ et est un point isolé de A.

Soit V ce voisinage, et $a_1, \dots, a_n$ les points de A distincts de x (éventuellement) qu'il contient. $\forall\, k \leqslant n$, $\exists\, V_k \in \mathcal{V}(x)$ et $W_k \in \mathcal{V}(a_k)$ tel que $V_k \cap W_k = \varnothing$ de sorte que $\bigcap V_k$ est un voisinage de x qui ne contient aucun point de A hormis éventuellement x. Comme $x \in \overline{A}$ Il en résulte que $x \in A$ et donc que x est isolé.

4 Continuité

Propriété 1 : Soit $f : (E, \mathcal{T}) \longrightarrow (E', \mathcal{T}')$; les propriétés suivantes sont équivalentes.

i) L'image réciproque d'un ouvert est un ouvert ; soit $\forall\, \mathcal{O}' \in \mathcal{T}'$, $f^{-1}(\mathcal{O}') \in \mathcal{T}$;

ii) L'image réciproque d'un fermé est un fermé ;

iii) $\forall\, x \in E$, $\forall\, W \in \mathcal{V}(f(x)$ alors $f^{-1}(W) \in \mathcal{V}(x)$.

Définition 2 : Lorsque l'une de ces propriétés est vérifiée on dit que f est continue.

Une application bijective continue dont la réciproque est continue se nomme un homéomorphisme.

Exemple 4.1 : L'application identité de la topologie grossière dans la topologie discrète est bijective mais sa réciproque n'est pas continue puisque par exemple $\{a\}$ est un ouvert pour la topologie discrète (tout y est ouvert) tandis que son image réciproque $\{a\}$ n'est pas ouvert puisque dans la grossière seul E et $\varnothing$ le sont.

Bien sûr il existe des contrexemples bien moins pathologiques et extrêmes.

Proposition 3 : Un produit d'applications continues (resp. d'homéomorphismes) est continues (resp. un homéomorphisme).

Propriété 4 : L'image d'un ouvert (d'un fermé) par un homéomorphisme est un ouvert (un fermé).

Exemple 4.2 : $\mathcal{T}_A$ est la moins fine des topologies telles que l'injection canonique $i : A \longrightarrow E$ soit continue.

5 Topologie produit

Définition 1 : Soit $(E_i, \mathcal{T}_i)$ une famille finie d'espaces topologiques. Ω est dit ouvert élémentaire de $E = \prod E_i$, si $\Omega = \prod \mathcal{O}_i$ où $\mathcal{O}_i \in \mathcal{T}_i$.

Propriété 2 : On définit une topologie sur E en définissant un ouvert comme une réunion quelconque d'ouverts élémentaires

DEMST : $\varnothing = \prod \varnothing$ et $E = \prod E_i$ sont bien des produits d'ouverts.
La stabilité par réunion quelconque est évidente.
$\Omega \cap \Omega' = \prod (\mathcal{O}_i \cap \mathcal{O}'_i)$ est encore un ouvert élémentaire et $\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 = \bigcup_{(i,j)} \Omega_i \cap \Omega_j$.

Propriété 3 : Les projections $pr_i : E \longrightarrow E_i$ sont des applications continues et ouvertes.

La topologie produit est la moins fine des topologies de E rendant les projections continues.

DEMST : Si $\mathcal{O}_i \subset E_i$ est un ouvert, $pr_i^{-1}(\mathcal{O}_i) = E_1 \times \cdots \times \mathcal{O}_i \times \cdots E_n$ qui est un ouvert de E.

Soit $\mathcal{O}$ un ouvert de E. $\mathcal{O} = \bigcup_{j \in J} \Omega_j$, $pr_i(\mathcal{O}) = \bigcup_J pr_i(\Omega_j) = \bigcup_J \mathcal{O}_i^j$ si $\Omega_j = \prod_I \mathcal{O}_i^j$. Cette réunion étant bien un ouvert de $\mathcal{T}_i$.

Soit $\mathcal{T}'$ une topologie rendant les pr_i continues. Il faut prouver que tout ouvert de $\mathcal{T}$ est un ouvert de $\mathcal{T}'$. Il suffit de le prouver pour les ouverts élémentaires. Pour cela, on observe d'abord que $\Omega = \prod \mathcal{O}_i = \bigcap \omega_i$ où $\omega_i = E_1 \times \cdots \times \mathcal{O}_i \times \cdots E_n$. Or $\omega_i = pr_i^{-1}(\mathcal{O}_i)$ qui est ouvert par hypothèse.

Remarque 5.1 : Il faut remarquer que moins il y a d'ouverts dans E, autrement dit plus la topologie de E est grossière ou moins elle est fine, et moins une application partant de E a de chance d'être continue. Ainsi cet énoncé dit que la topologie est la topologie "minimale" qui rendent les pr_i continues.

Propriété 4 : Soit $f : (F, \mathcal{T}') \longrightarrow (E, \mathcal{T})$ avec $E = \prod E_i$. F est continue si et seulement si $\forall\, i$, $pr_i \circ f$ est continue.

Autrement dit, une application à valeur dans un produit est continue ssi toutes les applications coordonnées le sont

DEMST : Si f est continue, $pr_i \circ f$ est une composée d'applications continues donc l'est.

Réciproquement, si ω est un ouvert élémentaire de E et $\omega = \prod \mathcal{O}_i$ on a aussi $\omega = \bigcap_1^n E_1 \times \cdots \times \mathcal{O}_i \times \cdots E_n = \bigcap D_i$, dès lors $pr_i^{-1}(\mathcal{O}_i) = D_i$ et $f^{-1}(\omega) = f^{-1}\left(\bigcap_1^n D_i\right) = \bigcap_1^n f^{-1}(D_i) = \bigcap_1^n (pr_i \circ f)^{-1}(\mathcal{O}_i)$; c'est une intersection d'ouverts de F.

Propriété 5 : $E = \prod E_i$ est séparé si et seulement si $\forall\, i \in I$, E_i est séparé.

DEMST : Si les E_i sont séparés, soit $a = (a_i) \neq b = (b_i) \in E$. Il existe alors un indice k tel que $a_k \neq b_k$ et donc des ouverts disjoints de E_k, $\mathcal{O}_k, \mathcal{O}'_k$ contenant respectivement a_k et b_k. Mais alors $V = E_1 \times \cdots \mathcal{O}_k \times \cdots E_n$ et $V' = E_1 \times \cdots \mathcal{O}'_k \times \cdots E_n$ sont des voisinages de a et b disjoints puisqu'à l'indice k, $\mathcal{O}_k \cap \mathcal{O}'_k = \varnothing$.

Réciproquement, fixons k et soit $a_k \neq b_k$. Soit ensuite $a = (\alpha_1, \dots, \alpha_k, \dots, a_n)$ et $b = (\alpha_1, \dots, b_k, \dots, \alpha_n)$; alors $a \neq b$ dans E donc il existe $V \in \mathcal{V}(a)$ et $V' \in \mathcal{V}(b)$ tels que $V \cap V' = \varnothing$. Il existe ensuite des ouverts élémentaires disjoints $\omega \subset V$, $a \in \omega$ et $\omega' \subset V'$, $b \in \omega'$ où $\omega = \prod_1^n \mathcal{O}_i$, $\omega' = \prod_1^n \mathcal{O}'_i$. Comme pour $i \neq k$, $\alpha_i \in \mathcal{O}_i \cap \mathcal{O}'_i$ et que $\mathcal{O} \cap \mathcal{O}' = \varnothing$, on doit avoir $\mathcal{O}_k \cap \mathcal{O}'_k = \varnothing$.

Exercice : Montrer que E est séparé si et seulement si la diagonale Δ est fermée dans $E \times E$.

6 Compacité

6.1 Espace compact

Définition 1 : Un espace topologique est dit compact s'il est séparé et s'il vérifie la propriété de Borel-Lebesgue :

"De tout recouvrement de E par une famille d'ouverts on peut extraire un sous recouvrement fini".

Autrement dit : si $E \subset \bigcup_I \mathcal{O}_i$, il existe $J \subset I$ fini tel que $E \subset \bigcup_J \mathcal{O}_j$.

Le point important est que le nouveau recouvrement soit fini.

L'hypothèse de séparation oblige la topologie à avoir "beaucoup" d'ouverts, c'est-à-dire à être plutôt fine. Sans cette hypothèse, n'importe quel ensemble serait compact pour sa topologie grossière.

Un espace topologique fini et séparé est toujours compact.

$\mathbb{R}$ n'est pas compact car la famille $\mathcal{O}_x =]x-1, x+1[$ est un recouvrement de $\mathbb{R}$ dont on ne peut extraire un sous-recouvrement fini car ce serait une réunion finie de parties bornées contenant $\mathbb{R}$ qui n'est justement pas borné.

En passant au complémentaire on obtient

Proposition 2 : La propriété de Borel-Lebesgue équivaut à

"De toute famille de fermés d'intersection vide on peut extraire une sous-famille finie d'intersection vide".

Corollaire 1 : Si E est compact et si $(F_n)_{\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de fermés non vides alors $\bigcap_{\mathbb{N}} F_n \neq \varnothing$.

Demst : Sinon on pourrait trouver une sous-famille finie d'intersection vide ce qui n'est puisque cette intersection est égal au plus petit d'entre eux.

6.2 Partie compacte

Définition 3 : Une partie $A \subset E$ est dite compacte si elle est compacte pour la topologie induite $\mathcal{T}_A$.

Proposition 4 : A est compact si et seulement si :

"De tout recouvrement de A par des ouverts de E, on peut extraire un sous-recouvrement fini."

Demst : Soit $(\mathcal{O}_i)_I$ une famille d'ouverts de E telle que $A \subset \bigcup \mathcal{O}_i$; soit $\mathcal{O}'_i = A \cap \mathcal{O}_i$. $\mathcal{O}'_i \in \mathcal{T}_A$ et l'on a $\bigcup_I \mathcal{O}'_i = \big(\bigcup_I \mathcal{O}_i\big) \cap A = A$. On a donc une recouvrement de A. Il existe donc $J \subset I$ fini tel que $\bigcup_J \mathcal{O}'_i = A$ d'où $A \subset \bigcup_J \mathcal{O}_i$.

Exemple 6.1 : En anticipant un peu, dans une espace séparé, si (u_n) est une suite convergente de limite ℓ alors l'ensemble $\{u_n, n \in \mathbb{N}\} \cup \{\ell\}$ est compact.

Propriété 5 : Une partie compacte d'un espace séparé est fermée.

Demst : On prouve que son complémentaire est un ouvert.

Soit $x \in \complement A$ et $a \in A$. Il existe un ouvert V_a contenant a et un ouvert W_a contenant x $V_a \cap W_a = \varnothing$.

La famille des V_a constitue un recouvrement de A par des ouverts de E, dont on extrait un sous-recouvrement fini V_{a_i}, $i \in 1, n]$. Soit maintenant $W = \bigcap_1^n W_{a_i}$; c'est un ouvert comme intersection fini d'ouverts et il contient x.

$$V \cap W = \Big(\bigcup_1^n V_{a_i}\Big) \cap W = \bigcup_1^n \big(V_{a_i} \cap W\big) = \varnothing,$$

car $W \subset W_{a_i}$ et que $V_{a_i} \cap W_{a_i} = \varnothing$.

Proposition 6 : Dans un espace compact, "compact" équivaut à "fermé".

Demst : Il ne reste qu'à prouver la réciproque. Soit A un fermé dans un compact E, et (F_i) une famille de fermé de A, $\bigcap F_i = \varnothing$. Comme $F_i = F'_i \cap A$ avec F'_i fermé dans E, F_i est fermé dans E, il existe donc une sous-famille fini $(F_j)_J$ telle que $\bigcap_J F_i = \varnothing$.

6.3 Compacité et continuité

Théorème 7 : Soit $f : E \longmapsto F$ continue de E compact dans F séparé, alors $f(E)$ est compact.

Autrement dit "l'image continue d'un compact dans un séparé est compacte".

Demst : Soit $(\mathcal{O}'_i)_J$ un recouvrement de $f(E)$ par des ouverts. Comme f est continue, $f^{-1}(\mathcal{O}_i) = \mathcal{O}_i$ est un ouvert de E et évidemment $f^{-1}(f(E)) = E = f^{-1}\big(\bigcup_I \mathcal{O}'_i\big) = \bigcup f^{-1}(\mathcal{O}'_i)$. Les $\mathcal{O}_i$ constituent donc un recouvrement de E par des ouverts on peut donc en extraire un sous-recouvrement fini $\mathcal{O}_j)_J$. et $f(E) = f\big(\bigcup \mathcal{O}_j\big) = \bigcup_J f(\mathcal{O}_j) = \bigcup_J \mathcal{O}'_i$.

Corollaire 1 : Une bijection continue entre deux compacts est un homéomorphisme.

DEMST : Soit $g = f^{-1}$ et F' un fermé de E ; c'est un compact donc $g^{-1}(F') = f(F')$ est compact donc fermé ! et g est donc continue.

6.4 COMPACTS DE $\mathbb{R}$

Théorème 8 : (de Borel-Lebesgue) Un intervalle $[a, b]$ est compact.

DEMST : Soit $(\mathcal{O}_i)_I$ une famille d'ouverts de $\mathbb{R}$ $[a, b] \subset \bigcup_I \mathcal{O}_i]$.

Considérons $P = \{x \in [a, b],\ [a, x]$ recouvert par un nombre fini de $\mathcal{O}_i\}$.

$P \neq \varnothing$ car évidemment $a \in P$ et est borné puisque ses éléments sont dans $[a, b]$. Soit donc $c = \operatorname{Sup} P$. On a $c \in \overline{P} \subset [a, b]$ donc $c \in [a, b]$. Il existe alors i_0 tel que $c \in \mathcal{O}_{i_0}$. de surcroît $\exists\, \varepsilon > 0$, tel que $]c-\varepsilon, c+\varepsilon[\subset \mathcal{O}_{i_0}$. Comme $c-\varepsilon < c$, il existe $d \in P$, $c-\varepsilon < d \leqslant c$ et donc $[a, d]$ est recouvert par un nombre fini d'ouverts, il suffit alors de rajouter $\mathcal{O}_{i_0}$ pour obtenir que $[a, c+\varepsilon/2]$ est recouvert par un nombre fini de $\mathcal{O}_i$.

Si $c \neq b$, on peut choisir ε pour que $c + \varepsilon/2 \leqslant b$ mais cela contredit la maximalité de c. Il en résulte $c = b$.

Théorème 9 : Les compacts de $\mathbb{R}$ sont les parties fermées bornées.

DEMST : On sait déjà qu'un compact K est fermé. Du recouvrement $K \subset \bigcup_{x\in K}]x-1, x+1[$ on extrait un sous-recouvrement fini qui est alors borné.

Réciproquement, si K est borné, on a $K \subset [a, b]$ qui est compact. Si de plus K est fermé, il est fermé dans un compact donc compact.

Proposition 10 : Les compacts de $\mathbb{R}^n$ sont les parties fermées bornées.

DEMST : On sait déjà qu'ils sont fermés. Si maintenant $x \in K$ et $x = (x_1, \dots, x_n)$, on pose $P_x = \prod_1^n]x_i - 1, x_i + 1[$; c'est un ouvert et $K \subset \bigcup_{x\in K} P_x$. On extrait ensuite un nombre fini de x et K est donc borné.

Réciproquement K, borné est inclus dans un pavé $\prod_1^n [a_i, b_i]$ qui est compact puisque les $[a_i, b_i]$ sont compacts. K fermé dans un compact est compact.

Propriété 11 : Un produit fini de compact est compact.

7 CONNEXITÉ

Notons tout d'abord que par passage au complémentaire, il est équivalent de dire "Il existe un ouvert (non trivial) dont le complémentaire est ouvert", "Il existe un fermé (non trivial) dont le complémentaire est fermé", "il existe une partie non triviale à la fois ouverte et fermée".

Définition 1 : Un espace est dit connexe s'il ne vérifie PAS cette propriété.

Exemple 7.1 : $\mathbb{Q}$ n'est pas connexe car si $a \notin \mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}\cap]a, +\infty[= \mathbb{Q}\cap[a, +\infty[$ or le premier membre est un ouvert de $\mathbb{Q}$ et le second un fermé.

Exemple 7.2 : $\mathbb{R}$ est connexe. On raisonne part l'absurde en supposant que A est ouvert et fermé. Soit $x \notin A$ (x existe car $A \neq \mathbb{R}$) alors $B =]x, +\infty[\cap A = [x, +\infty[\cap A$ et aussi $B' =]-\infty, x[\cap A =]-\infty, x] \cap A$. A étant non vide, B ou B' est non vide par exemple B. Il est minoré et l'on pose $b = \operatorname{Inf} B$. Comme B est fermé, $b \in B$ mais B est aussi ouvert d'où un $\alpha > 0$ tel que $]b-\alpha, b+\alpha[\subset B$ ce qui est absurde.

Proposition 2 : E est connexe si et seulement si toute application continue de E dans $\{0, 1\}$ (topo. discrète) est constante.

DEMST : $A = f^{-1}(\{0\})$ est à la fois ouvert et fermé comme image réciproque d'une partie ouverte et fermé. Si c'est $= \varnothing$ alors $f^{-1}(\{1\}) = E$ et $f = 1$, et sinon $A = E$ et $f = 0$.

Réciproquement par l'absurde, Si A et $B = \complement A$ sont ouverts, on pose $f_{/A} = 0$ et $f_{/B} = 1$. f est continue puisque $f^{-1}(\{0\}) = A$ et $f^{-1}(\{1\}) = B$ qui sont ouverts, et f n'est bien sûr pas constante.

Définition 3 : Une partie A sera dite connexe si elle est connexe pour la topologie induite.

Propriété 4 : Si E est connexe et f une application continue définie sur E alors $f(E)$ est connexe.

DEMST : Soit φ une application continue sur $f(E)$ à valeur dans $\{0, 1\}$. $\varphi \circ f$ est continue sur E donc constante par connexité de E. et par conséquent φ l'est sur $f(E)$.

Théorème 5 : Les parties connexe de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.

DEMST : Si A n'est pas un intervalle, il existe $x < y < z$ tels que $x, z \in A$ et $y \notin A$. Mais alors $A\cap]y, +\infty[= A \cap [y, +\infty[$ est ouvert et fermé et non vide puisque contenant z.

Remarque 7.3 : En joignant ces deux derniers résultats, on obtient évidemment le théorème des valeurs intermédiaires.