EXERCICE

On pose $\varphi(x) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-\frac{x}{\cos^2\theta}}\,d\theta$.

1° Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$.

2° Soit $x > 0$ et h tel que $|h| \leqslant x$; montrer à l'aide de la formule de Taylor que l'on a

$$\left| e^{-\frac{x+h}{\cos^2\theta}} - e^{-\frac{x}{\cos^2\theta}} + \frac{h}{\cos^2\theta} e^{-\frac{x}{\cos^2\theta}} \right| \leqslant 2h^2.$$

3° En déduire que φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et expliciter φ'.

4° On pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-\frac{x^2}{\cos^2\theta}}\,d\theta$.

Montrer que f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et expliciter $f'(x)$.

5° Soit $g(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-u^2}\,du$; montrer que $f'(x) = -2g(x)g'(x)$.

6° Montrer que $f(x) = \dfrac{\pi}{4} - g^2(x)$.

7° En déduire que $\lim\limits_{+\infty} g = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

EXERCICE

1° L'intégrand est continue sur $[0, \frac{\pi}{4}]$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2° On applique la formule de Taylor à l'ordre 2

$$\Delta = e^{-\frac{x+h}{\cos^2\theta}} - e^{-\frac{x}{\cos^2\theta}} + \frac{h}{\cos^2\theta} e^{-\frac{x}{\cos^2\theta}} = \frac{1}{2}\frac{h^2}{\cos^4 t} e^{-\frac{x+\theta h}{\cos^2 t}}$$

où $\theta \in]0,1[$. Avec la condition sur h on aura $\dfrac{x+\theta h}{\cos^2 t} \geqslant 0$ d'où

$$|\Delta| \geqslant \frac{1}{2}\frac{h^2}{(1/\sqrt{2})^4} = 2h^2.$$

Par application de l'inégalité triangulaire, on obtient alors

$$\left|\varphi(x+h) - \varphi(x) + h\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-\frac{x}{\cos^2\theta}} \frac{dt}{\cos^2 t}\right| \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2h^2 dt = \frac{\pi\, h^2}{2}.$$

Divisant par h et faisant tendre h vers 0, on obtient que φ est dérivable et que

$$\varphi'(x) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-\frac{x}{\cos^2\theta}} \frac{dt}{\cos^2 t}.$$

3° $f(x) = \varphi(x^2)$. $f'(x) = 2x \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-\frac{x^2}{\cos^2\theta}} \frac{dt}{\cos^2 t}$.

4° Il suffit de poser $u = x\tan t$.

5° $f(x) = f(0) - g^2(x)$.

6° $\lim_\infty f = 0$ car $\cos^2 t \leqslant 1$ donne $f(x) \leqslant e^{-x^2}$.