1° Soit $x \in E$ et $y \in F_2$ et $x' \in F_1$ on a $d(x,F_2) \leqslant d(x,y) \leqslant d(x,x') + d(x',y)$ alors $d(x,F_2) \leqslant d(x,x') + d(x',F_2) \leqslant d(x,x') + h(F_1,F_2)$ d'où l'inégalité du texte par passage à la borne inférieur.

Si $h(F_1,F_2) = 0$ alors $g(F_1,F_2) = 0$ donc $\forall\, x \in F_1,\ x \in \overline{F}_2 = F_2$ et ainsi $F_1 \subset F_2$ on échange F_1 et F_2 pour obtenir la séparation $h(F_1,F_2) = 0 \Longrightarrow F_1 = F_2$.

De $d(x,F_2) \leqslant d(x,F_3) + h(F_2,F_3) \leqslant h(F_1,F_3) + h(F_2,F_3)$ valable pour tout $x \in F_1$, on tire $g(F_1,F_2) \leqslant h(F_1,F_3) + h(F_2,F_3)$ et il suffit d'échanger F_1, F_2 pour obtenir l'inégalité triangulaire.

Notons que $F_1 \subset F_2 \not\Longleftrightarrow h(F_1,F_2) = 0$.

$B \in \overline{B} \Longrightarrow$ 1er $\mathrm{Sup}\ \geqslant$2 eme Sup. Puis si $x \in \overline{B}$ et s'écrit donc $\lim b_n$. on aura $d(x,A) = \lim d(b_n,A) \leqslant$2 eme Sup on passe alors à la borne supérieure sur $x \in \overline{B}$.

2° $g(K_1,K_2) = d(a_1,K_2)$ puisque $d(x,K_2)$ est continue. $d(a_1,K_2) = d(a_1,a_2))$. On fait de même avec $g(K_1,K_2)$ qui vaut $d(a_1',a_2')$ l'un des deux couples réalisant $h(K_1,K_2)$.

3° D'abord $Y \neq \varnothing$ puisque c'est une intersection décroissante de compacts non vides. $h(Y_n,Y) = g(Y_n,Y) = d(y_n,Y)$ pour un certain $y_n \in Y_n$. Ils constituent une suite de E d'où l'on extrait $y_{\varphi(n)}$ convergeant vers y. Comme pour $n > p$, $\varphi(n) > \varphi(p) \geqslant p$ on a $\forall\, n \geqslant p,\quad y_{\varphi(n)} \in Y_p$ qui étant compact est fermé d'où $y \in Y_p$ et ceci $\forall\, p$ donc $y \in Y$. Comme $d(y_{\varphi(n)},y) \geqslant d(y_{\varphi(n)},Y)$, $h(Y_{\varphi(n)},Y)$ tend vers 0.

On est alors ramené curieusement à un exercice classique d'une suite monotone qui admet une sous-suite convergente, mais on ne peut évidemment pas utiliser ce résultat tel quel puisqu'il n'est valable que dans $\mathbb{R}$.

En fait $\forall\, p \geqslant \varphi(n),\ h(Y_p,Y) = \mathrm{Sup}_{\,Y_p}\, d(x,Y) \leqslant \mathrm{Sup}_{\,Y_{\varphi(n)}}\, d(x,Y) = h(Y_{\varphi(n)},Y)$ donc $d(Y_p,Y)$ tend vers 0.

4° a) Comme $X_n \subset Y_n$, on a $h(X_n,Y_n) = \mathrm{Sup}_{\,y\in Y_n}\, d(y,X_n) = \mathrm{Sup}\,\{d(y,X_n),\ y \in \bigcup X_p\} = \mathrm{Sup}_{\,p\geqslant n}\,\mathrm{Sup}_{\,X_p}\, d(y,X_n) = \mathrm{Sup}_{\,p\geqslant n}\, g(X_p,X_n) \leqslant \mathrm{Sup}_{\,p\geqslant n}\, h(X_p,X_n) < \varepsilon$ pour n assez grand.

b) $h(X_n,Y) \leqslant h(X_n,Y_n) + h(Y_n,Y)$.

5° a) Supposons construit x_i, comme $h(X_{N_i},X_{N_{i+1}}) < 2^{-a-i}$ on a $\mathrm{Sup}_{\,N_i}\, d(x,X_{N_{i+1}}) < 2^{-a-i}$ et par conséquent il existe $x_{i+1} \in X_{N_{i+1}}$ tel que $d(x_i,x_{i+1}) < 2\cdot 2^{-a-i}$.

b) $d(x_p,x_{p+q}) \leqslant \sum_{0}^{q-1} d(x_{p+i},x_{p+i+1}) \leqslant 2\cdot\sum_{0}^{q-1} 2^{-a-p-i} \leqslant 4\cdot 2^{-a-p}$ qui est arbitrairement petit pour p assez grand et pour tout q. La suite est bien de Cauchy.Notons x sa limite.

On a $\forall\, k \geqslant p,\ x_k \in X_{N_k} \subset Y_{N_k} \subset Y_{N_p}$. Si l'on fait tendre k vers l'infini, on obtient $x \in Y_{N_p}$ car les Y_n sont fermés. Comme ils sont emboîtés et que la suite N_p tend vers $+\infty$ on a bien $x \in \bigcap Y_n = Y$.

c) On prend $p = 0$ et l'on fait tendre q vers $+\infty$ ce qui donne $d(x_0,x) < 4\cdot 2^{-a}$ et donc $d(x_0,Y) < 4\cdot 2^{-a}$ et ceci $\forall\, x_0 \in X_k,\ k \geqslant N_0$. Il en résulte $g\Big(\bigcup_{N_0} X_k, Y\Big) = g(Y_{N_0},Y) < 4\cdot 2^{-a}$. Comme $Y \subset Y_{n+1} \subset Y_n$ $h(Y_n,Y) = g(Y_n,Y)$ décroît et l'on a par conséquent $\forall\, k \geqslant N_0,\ g(Y_k,Y) = h(Y_k,Y) < 4\cdot 2^{-}n$. Ainsi $\lim Y_n = Y$.

Maintenant comme $X_p \subset Y_p$, $h(X_p,Y_p) = g(Y_p,X_p) = \mathrm{Sup}_{\,k\geqslant p}\, g(X_k,X_p) \leqslant \mathrm{Sup}_{\,k\geqslant p}\, h(X_k,X_p)$ est aussi petit que l'on veut pour p assez grand, puisque la suite X_k est de Cauchy. On en déduit que $h(X_p,Y)$ tend vers 0, et X_p ver Y.

$\mathcal{F}$ n'est pas fermé car si $X_n = [\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}]$ on a Y_n

6° Soit $r > 0$. E est recouvert par un nombre fini de boules B_i de rayon r que l'on peut choisir fermées. Soit K un compact de E et L la réunion des boules B_i qui rencontrent K. L est un compact comme réunion finie de compacts. De plus $K \subset L$ et $h(K,L) = \mathrm{Sup}_{\,L}\, d(x,K)$. Or $\forall\, x \in L,\ \exists\, i,\ x \in B_i$ et comme $B_i \cap K \neq \varnothing$, $d(x, K) \leqslant 2r$. Par passage à la borne $h(L, K) \leqslant 2r$. Ainsi $\mathcal{K}$ est recouvert par les boules de centre les L (i.e. les réunions des boules B_i) et de rayon $2r$.

7° Soit K_0 un compact, $\varepsilon > 0$ et $y \in K_0$ étant fixés, il existe α_y tel que $d(x, y) < \alpha_y \Longrightarrow d(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Du recouvrement $B(y, \alpha_y/2)$ on extrait un sous-recouvrement fini $B(y_i, \alpha_i/2)$ où l'on a posé $\alpha_i = \alpha_{y_i}$.

Si maintenant $h(K, K_0) < \operatorname{Inf} \alpha_i/2 = \alpha/2$, on aura $\forall\, x \in K$, $d(x, K_0) < \frac{\alpha}{2}$ or cette distance est atteinte en un certain $y \in B(y_i, \alpha_i/2)$ pour un certain i. Ainsi $d(x, y_i) \leqslant d(x, y) + d(y_i, y) \leqslant \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha_i}{2} < \alpha_i$ et par conséquent $d(f(x), f(y_i)) < \varepsilon$ d'où $d(f(x), f(K_0)) < \varepsilon$ ceci pour tout $x \in K$ d'où $\varepsilon > g(f(K), f(K_0)) \leqslant h(f(K), f(K_0))$.

Pour la continuité uniforme c'est la même démonstration avec un α indépendant de y.