1° Soit (E,d) un espace métrique, et $A \neq \varnothing$ une partie de E. Montrer que l'application $\delta(x) = d(x,A)$ est u-continue sur E et que $d(x,A) = d(x,\overline{A})$. Prouver également que $\mathrm{Sup}\,\{d(x,A),\ x \in B\} = \mathrm{Sup}\,\{d(x,A),\ x \in \overline{B}\}$.

2° On suppose dans tout le problème que E est borné. Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des fermés non vides de E et $\mathcal{K}$ l'ensemble des compacts non vides de E.

Pour F_1 et F_2 dans $\mathcal{F}$ on note $g(F_1,F_2) = \underset{x \in F_1}{\mathrm{Sup}}\, d(x,F_2)$ et $h(F_1,F_2) = \mathrm{Sup}\,[g(F_1,F_2), g(F_2,F_1)]$.
Prouver que $\forall\, x \in E$,
$$d(x,F_1) \leqslant d(x,F_2) + h(F_1,F_2).$$
En déduire que h est une distance sur $\mathcal{F}$. Elle se nomme **distance de Hausdorff**.

Que vaut $h(\{a\},\{b\}$ avec $(a,b) \in E^2$? que dire de $h(\{a\},F)$ et de $h(F_1,F_2)$ si $F_1 \subset F_2$.

3° Montrer que pour $(K_1,K_2) \in \mathcal{K}^2$, il existe $(a_1,a_2) \in K_1 \times K_2$, $d(a_1,a_2) = h(K_1,K_2)$.

4° **a)** On suppose E compact. Soit Y_n une suite de $\mathcal{K}$ muni de la distance h, décroissante pour l'inclusion. Prouver que Y_n converge vers $\bigcap Y_n = Y$.

b) Soit X_n une suite de Cauchy dans $\mathcal{K}$ et $Y_n = \overline{\bigcup_{p \geqslant n} X_p}$. Prouver que $h(X_n,Y_n)$ tend vers 0 et que $(\mathcal{K},h)$ est complet.

5° On supposed E complet et l'on considère (X_n) une suite de Cauchy dans $(\mathcal{F},h)$. On pose $Y_n = \overline{\bigcup_{p \geqslant n} X_p}$.

Soit $a \in \mathbb{N}$ et N_i tel que $\forall\, p,q \geqslant N_i, \quad h(X_p,X_q) < 2^{-a-i}$; on suppose $N_{i+1} > N_i$ ce qui est toujours faisable.

a) Soit $x_0 \in X_k$ pour un certain $k \geqslant N_0$. Construire une suite x_i tel que
$$\forall\, i, \quad x_i \in X_{N_i}, \quad d(x_i,x_{i+1}) \leqslant 2 \cdot 2^{-a-i}.$$

b) Montrer que la suite x_i est de cauchy et que sa limite est dans $Y = \bigcap Y_n$.

c) Prouver que X_n tend vers Y (qui étant dans $\mathcal{F}$ prouve que $\mathcal{F}$ est complet.

6° Etant donné deux espaces métriques (E,d) et (E',d') et une application continue f de E dans E', Montrer que f définit une application continue $\hat{f}$ de $\mathcal{K}$ dans $\mathcal{K}'$.

Si f est u-continue, en est-il de même pour $\hat{f}$?