PIVOT DE GAUSS SUR UN ANNEAU

JÉRÉMY BLASSELLE

1. Généralités

Tout les anneaux considérés ici seront supposés unitaires et commutatifs.

Définition 1.1. *On dira que A est un anneau de Gauss si pour tout entier n, $Sl_n(A)$ est engendré par les matrices de transvections.*

Lemme 1.2. *Soit A un anneau et $M \in Sl_n(A)$ une matrice diagonale.*
Alors M peut s'écrire comme produit de matrices de transvections.

Preuve du lemme.
Démontrons le résultat par récurrence sur n. Le résultat est trivial pour $n = 1$. Supposons le vrai au rang $n - 1$.
Soit $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in Sl_n(A)$ diagonale.
On a

$$M = \begin{pmatrix} m_{1,1} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & m_{1,1}^{-1} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & m_{2,2}m_{1,1} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & m_{3,3} & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & m_{n,n} \end{pmatrix}$$

Par hypothèse de récurrence la seconde matrice peut s'écrire comme produit de matrices de transvection.

Il ne reste plus qu'à montré que toute matrice de la forme $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix}$ s'écrit comme produit de matrices de transvection.

Or en multipliant par des matrices de transvections à gauche ou a droite on obtient successivement les matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ce qui achève la preuve du lemme. □

Lemme 1.3. *[Méthode du pivot] Les assertions suivantes sont équivalentes*

(1) A est un anneau de Gauss

(2) Pour tout entier n, et toute matrice $M \in Sl_n(A)$, il existe des matrices de transvections $B_1, ..., B_p$ et $B'_1, ..., B'_q$ tels que le coeffient à l'intersection de la première ligne et de la première colonne de la matrice $B_1...B_pMB'_1...B'_q$ soit inversible.

Preuve.

Si A est un anneau de Gauss on a clairement la propriété (2). Supposons maintenant que A vérifie la propriété (ii).

Démontrons que $Sl_n(A)$ est engendré par les matrices de transvections, par récurrence sur n. Le résultat est trivial pour $n = 1$. Supposons le vrai au rang $n-1$ et soit $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in Sl_n(A)$ dont l'on peut supposer par hypothèse que $m_{1,1}$ est inversible.

Pour $1 \leq i \leq n$, on soustait à la i-ème ligne, $\frac{m_{i,1}}{m_{1,1}}$ fois la première ligne, puis on soustait à la i-ème colonne, $\frac{m_{1,i}}{m_{1,1}}$ fois la première colonne et ainsi on obtient une matrice noté M_1 de la forme :

$$M_1 = \begin{pmatrix} m_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & M' & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

Si on pose maintenant

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & M'' & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M_3 = \begin{pmatrix} m_{1,1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_{1,1}^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & Id_{n-2} & \\ 0 & 0 & & & \end{pmatrix}$$

tel que $M_1 = M_2M_3$. On a alors $M'' \in Sl_{n-1}(A)$ et donc par hypothèse de récurrence M'' s'écrit comme un produit de matrices de transvections et il en est donc de même pour M_2.

De plus M_3 est produit de matrice de transvections d'après le lemme précédant. Ce qui achève la récurrence. □

Théorème 1.4. *Tout anneau euclidien est un anneau de Gauss.*

Preuve.

Soit A un anneau euclidien de stathme ν et $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in Sl_n(A)$.

On effectue alors l'algotithme suivant : On considère $1 \leq i_0 \leq n$ tel que $\nu(m_{i_0,1}) = \min\{\nu(m_{i,1},\ i \leq i \leq n)\}$ Ensuite pour tout $1 \leq i \leq n$ avec $i \neq i_0$

on effectue la division euclidienne

$$m_{i,1} = m_{i_0,1}q_i + r_i \qquad \text{où } \nu(q_i) < \nu(m_{i_0,1})$$

et on soustrait à la i-ème ligne q_i fois la ligne i_0. Et on recommence.

On reconnait là, l'algorithme d'euclide qui après un nombre fini d'étape nous donnera une matrice dont tout les coefficient de la première colonne seront nul sauf un coefficient qui sera égal au pgcd des coefficients de la première colonne de notre matrice de départ.

Ce coefficient est un élément inversible de A sinon le déterminant ne serait pas égal à 1.

Si ce coefficient se situe sur la ligne $i_1 \neq 1$, alors on ajoute la ligne 1, la ligne $i_1$et on est ainsi ramené à une matrice M' dont le coefficient à l'intersection de la première ligne et de la première colonne est inversible.

On applique enfin le lemme 1.3 qui achève la preuve. $\square$

Théorème 1.5. *Tout anneau local est un anneau de Gauss.*

Première preuve.

Soit $M = (m_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in Sl_n(A)$ et notons $I = xA$ l'unique idéal maximal de A.

Supposons qu'il n'existe pas d'élément inversible sur la première colonne. Or si on calcul le déterminant de la matrice en développant par rapport à la première colonne on obtient que 1 appartient à l'idéal engendré par les élément de la premières colonne.

De là on déduit qu'il existe forcément i_0 tel que $m_{i_0,1} \in A^\times$.

On peut maintenant supposer sans perdre de généralité que l'élément $m_{1,1}$ est inversible quitte à ajoute à la ligne 1, $m_{1,1}m_{i_0,1}^{-1} + 1$ fois la ligne i_0.

On applique enfin le lemme 1.3 qui achève la preuve. $\square$

Seconde Preuve.

Soit $M = (m_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in Sl_n(A)$ et notons I l'unique idéal maximal de A et $\phi : A \to A/I$ la surjection canonique que l'on étendera en la surjection canonique : $\phi : Sl_n(A) \to Sl_n(A/I)$

I étant un idéal maximal, A/I est un corps et donc on a :

$$M = \prod_{k\leq p} B_{i_k,j_k}(\lambda_k), \qquad \text{où pour tout } k \leq p,\ \lambda_k \in$$

On considère alors pour tout $k \leq p$ λ'_k tel que $\phi(\lambda'_k) = \lambda_k$.

Enfin si on considère la matrice :

$$M'(m'_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} = M \prod_{k\leq p} B_{i_k,j_k}(-\lambda'_k)$$

Alors on a par ce qui précède : $\phi(M') = Id$.

On en déduit que si $i \neq j$, alors $m'_{i,j} \in I$ et que $m'_{i,i} \in A^\times$.

Ainsi $m'_{1,1}$ est inversible et on applique le lemme 1.3 qui achève la preuve.
□

Proposition 1.6. *Propriétés de bases*

(i) Soit A un anneau de Gauss et I un idéal de A. Alors A/I est un anneau de Gauss.

(ii) Soient A_1 et A_2 deux anneaux de Gauss. Alors $A_1 \times A_2$ est un anneau de Gauss.

Preuve.

(i) Si on note $s : A \to A/I$, alors on remarque que l'application associée

$$\tilde{s} : Sl_n(A) \to Sl_n(A/I)$$

est un morphisme d'anneau qui envoie les matrices de transvection de $Sl_n(A)$ sur les matrices de transvections de $Sl_n(A/I)$. On en déduit que si A est un anneau de Gauss alors il en est de même pour A/I. □

(ii) On considère les isomorphismes

$$\phi : A \to A_1 \times A_2 \qquad \text{et} \qquad \phi : Sl_n(A) \to Sl_n(A_1) \times Sl_n(A_2)$$

que l'on notera de la même manière.

Soit $M \in Sl_n(A)$ et on notera $(M_1, M_2) = \phi(M)$.

Par hypothèse sur A_1 et A_2, les matrices M_1 et M_2 sécrivent comme produit de matrices de transvections :

$$M_1 = \prod_{k\leq n_1} B_{i_k,j_k}(\lambda_k) \qquad \text{et} \qquad M_2 = \prod_{k\leq n_2} B_{i'_k,j'_k}(\lambda'_k)$$

On a alors :

$$M_1 = \prod_{k\leq n_1} B_{i_k,j_k}(\lambda_k) \prod_{k\leq n_1} B_{i'_k,j'_k}(0) \qquad \text{et} \qquad M_2 = \prod_{k\leq n_1} B_{i_k,j_k}(0) \prod_{k\leq n_2} B_{i'_k,j'_k}(\lambda'_k)$$

Et donc quitte a réindexer ce nouveau produit on a :

$$M_1 = \prod_{k\leq n_1+n_2} B_{i_k,j_k}(\lambda_k) \qquad \text{et} \qquad M_2 = \prod_{k\leq n_1+n_2} B_{i_k,j_k}(\lambda'_k)$$

Et finalement on a :

$$\begin{aligned} M=\phi^{-1}(M_1,M_2) &= \phi^{-1}\left(\prod_{k\leq n_1+n_2} B_{i_k,j_k}(\lambda_k), \prod_{k\leq n_1+n_2} B_{i_k,j_k}(\lambda'_k)\right) \\ &= \prod_{k\leq n_1+n_2} \phi^{-1}(B_{i_k,j_k}(\lambda_k), B_{i_k,j_k}(\lambda'_k)) \\ &= \prod_{k\leq n_1+n_2} (B_{i_k,j_k}(\phi^{-1}(\lambda_k,\lambda'_k)) \end{aligned}$$

Donc A est bien un anneau de Gauss. □

Corollaire 1.7. *Soit A un anneau de Gauss principal.*
Tout A-module de type fini est un anneau de Gauss.

Première preuve. Si A est un anneau principal, alors tout A-module de type fini est isomorphe à un anneau de la forme

$$A^r \times \prod_{i=1}^{k} A/n_iA, \text{ avec } n_1|n_2...|n_k$$

Comme tout quotient d'anneau de Gauss est un anneau de Gauss, on en déduit que les anneaux A/n_iA sont des anneaux de Gauss. Et comme tout produit fini d'anneau de Gauss est un anneau de Gauss on en déduit que tout A-module de type fini est un anneau de Gauss. □

Seconde preuve. Si A est un anneau principal, alors tout A-module de type fini est isomorphe à un anneau de la forme

$$A^r \times \prod_{i=1}^{k} A/n_iA, \text{ avec } n_1|n_2...|n_k$$

D'après le théorème des restes chinois, A/n_iA est isomorphe à un produit fini d'anneaux locaux de la forme : $A/p^\alpha A$ avec p irréductible. On en déduit donc que $A^r \times \prod_{i=1}^{k} A/n_iA$ est un produit fini d'anneaux de Gauss et donc c'est un anneau de Gauss. □