Rectangles avec un côté entier

www.MathOMan.com

Question

Appelons un rectangle entier si sa largeur ou sa longueur est un entier. Soit R un rectangle constitué d'autres rectangles (leur union est R et ils se touchent seulement sur leurs bords).

1) Démontrer que si chacun de ces rectangles est entier, alors le rectangle R l'est aussi.

2) La réciproque est-elle vraie?

3) Cet énoncé en dimension deux peut-on le généraliser à des dimensions plus grandes, par exemple aux cubes?

Tournez la page pour la solution !

Solution

D'abord il est clair que la réciproque est fausse. En effet, il suffit de couper en quatre un carré de longueur 1.

Avant d'attaquer la preuve de la première question notons que pour tous $a,b \in \mathbb{R}$ on a

$$\int_a^b e^{2\pi i x}\mathrm{d}x = 0 \iff \left[\frac{e^{2\pi i x}}{2\pi i}\right]_a^b = 0 \iff e^{2\pi i b} = e^{2\pi i a} \iff e^{2\pi i(b-a)} = 1 \iff b-a \in \mathbb{Z}.$$

Soit maintenant $R = [a,b] \times [c,d]$ un rectangle constitué d'une famille de rectangles entiers $R_j = [a_j,b_j] \times [c_j,d_j]$, $j \in J$. On va intégrer de deux manières la fonction $(x,y) \mapsto e^{2\pi i(x+y)}$ sur le rectangle R, en séparant les intégrales des fonctions à variables séparées (théorème de Fubini).

$$\iint_R e^{2\pi i(x+y)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{[a,b]\times[c,d]} e^{2\pi i x}e^{2\pi i y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{[a,b]} e^{2\pi i x}\,\mathrm{d}x \int_{[c,d]} e^{2\pi i y}\,\mathrm{d}y$$

$$\begin{aligned}\iint_R e^{2\pi i(x+y)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \sum_{j\in J}\iint_{R_j} e^{2\pi i(x+y)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \sum_{j\in J}\iint_{[a_j,b_j]\times[c_j,d_j]} e^{2\pi i x}e^{2\pi i y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \sum_{j\in J}\int_{[a_j,b_j]} e^{2\pi i x}\,\mathrm{d}x \int_{[c_j,d_j]} e^{2\pi i y}\,\mathrm{d}y \;=\; 0\end{aligned}$$

La dernière somme est nulle car d'après hypothèse on a $b_j - a_j = 0$ ou $d_j - c_j = 0$ pour tout $j \in J$. On obtient donc

$$\int_a^b e^{2\pi i x}\,\mathrm{d}x \;=\; 0 \qquad \text{ou} \qquad \int_c^d e^{2\pi i y}\,\mathrm{d}y \;=\; 0\,,$$

d'où $b-a \in \mathbb{Z}$ ou $d-c \in \mathbb{Z}$.

Evidemment cette démonstration s'adapte à des dimensions supérieures. Par exemple, pour les cubes il suffit d'intégrer la fonction $(x,y,z) \mapsto e^{2\pi i(x+y+z)}$.