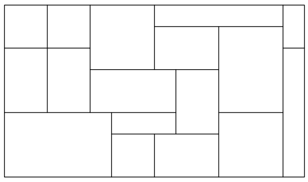
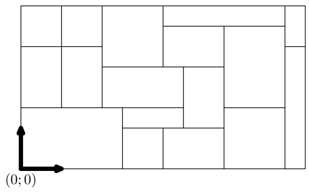
Rectangle à côté entier

Un rectangle est partitionné en petits rectangles dont les côtés sont parallèles aux côtés du grand rectangle. Montrer que si chacun des petits rectangles a au moins l'un de ses côtés de longueur entière, alors le grand rectangle a nécessairement au moins l'un de ses côtés de longueur entière.



Une résolution

On munit le plan d'un repère orthonormé, les vecteurs de la base dirigeant les côtés des rectangles. On place un sommet du grand rectangle en $(0,0)$.



1. On place une personne à chacun des centres des petits rectangles (on les appellera personnes centrées).

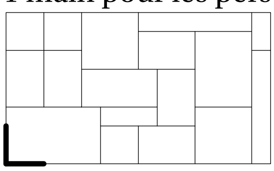
   On place également une personne (qu'on appellera personne-coin-entier) en chacun des sommets des rectangles à coordonnées entières.

   On se convainc sans peine que chacun des petits rectangles comporte un nombre pair de personnes-coin-entier (0, 2 ou 4) : dès qu'un coin est à coordonnées entières, le coin du rectangle se trouvant à l'autre bout d'un côté de longueur entière est lui aussi à coordonnées entières.
2. Des échanges de poignées de mains ont ensuite lieu : chaque personne-centrée serre la main à chacune des personnes-coin-entier de son rectangle.
3. On compte maintenant les mains serrées.

   (a) Les personnes centrées serrent 0, 2 ou 4 mains d'après la remarque ci-dessus sur le nombre de personnes-coin-entier d'un rectangle.

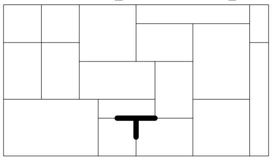
   (b) Les personnes-coin-entier peuvent serrer :

   – 1 main pour les personnes-coin-entier en « angle » :

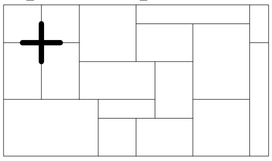
   

   Seules les personnes-coin-entier du grand rectangle peuvent être de ce type.

– 2 mains pour les personnes-coin-entier en « T » :



– 4 pour les personnes-coin-entier en « croix » :



4. Supposons que seul le coin $(0;0)$ du grand rectangle soit à coordonnées entières.

   Les personnes centrées serrent au total un nombre pair de mains, les personnes-coin-entier en « T » également et les personnes-coin-entier en « croix » de même. Enfin la personne-coin-entier en $(0,0)$ serre une main.

   Le nombre total de mains serrées est donc de la forme $2k+1$.

   Mais ceci est absurde puisque chaque poignée de mains fait intervenir deux mains : le nombre total de mains serrées est donc nécessairement pair.

   Contradiction et l'un des sommets du grand rectangle est donc aussi à coordonnées entières.