Rectangles avec un côté entier

www.MathOMan.com

Question

Appelons un rectangle entier si sa largeur ou sa longueur est un entier. Soit R un rectangle constitué d'autres rectangles (leur union est R et ils se touchent seulement sur leurs bords).

1) Démontrer que si chacun de ces rectangles est entier, alors le rectangle R l'est aussi.

2) La réciproque est-elle vraie?

3) Cet énoncé en dimension deux peut-on le généraliser à des dimensions plus grandes, par exemple aux cubes?

Tournez la page pour la solution !

Trois solutions

Solution grâce aux intégrales

D'abord il est clair que la réciproque est fausse. En effet, il suffit de couper en quatre un carré de longueur 1.

Avant d'attaquer la preuve de la première question notons que pour tous $a,b \in \mathbb{R}$ on a

$$\int_a^b e^{2\pi i x} \mathrm{d}x = 0 \iff \left[\frac{e^{2\pi i x}}{2\pi i}\right]_a^b = 0 \iff e^{2\pi i b} = e^{2\pi i a} \iff e^{2\pi i(b-a)} = 1 \iff b - a \in \mathbb{Z}.$$

Soit maintenant $R = [a,b] \times [c,d]$ un rectangle constitué d'une famille de rectangles entiers $R_j = [a_j,b_j] \times [c_j,d_j]$, $j \in J$. On va intégrer de deux manières la fonction $(x,y) \mapsto e^{2\pi i(x+y)}$ sur le rectangle R, en séparant les intégrales des fonctions à variables séparées (théorème de Fubini).

$$\iint_R e^{2\pi i(x+y)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{[a,b]\times[c,d]} e^{2\pi i x} e^{2\pi i y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{[a,b]} e^{2\pi i x}\,\mathrm{d}x \int_{[c,d]} e^{2\pi i y}\,\mathrm{d}y$$

$$\begin{aligned}\iint_R e^{2\pi i(x+y)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \sum_{j\in J} \iint_{R_j} e^{2\pi i(x+y)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \sum_{j\in J} \iint_{[a_j,b_j]\times[c_j,d_j]} e^{2\pi i x} e^{2\pi i y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \sum_{j\in J} \int_{[a_j,b_j]} e^{2\pi i x}\,\mathrm{d}x \int_{[c_j,d_j]} e^{2\pi i y}\,\mathrm{d}y \;=\; 0\end{aligned}$$

La dernière somme est nulle car d'après hypothèse on a $b_j - a_j = 0$ ou $d_j - c_j = 0$ pour tout $j \in J$. On obtient donc

$$\int_a^b e^{2\pi i x}\,\mathrm{d}x \;=\; 0 \qquad \text{ou} \qquad \int_c^d e^{2\pi i y}\,\mathrm{d}y \;=\; 0\,,$$

d'où $b - a \in \mathbb{Z}$ ou $d - c \in \mathbb{Z}$.

Evidemment cette démonstration s'adapte à des dimensions supérieures. Par exemple, pour les cubes il suffit d'intégrer la fonction $(x,y,z) \mapsto e^{2\pi i(x+y+z)}$.

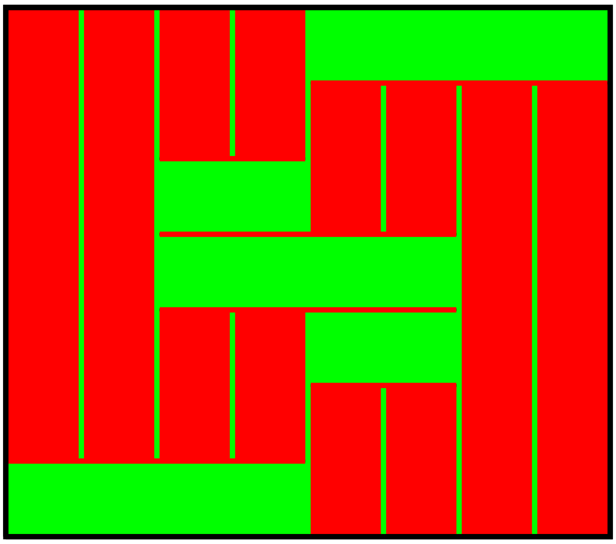
Solution grâce à un coloriage

Dans son livre *Solving Mathematical Problems*, Terence Tao propose la solution suivante :

On colore en vert les intérieurs de tous les petits rectangles possédant un coté horizontal entier les côtés verticaux ouverts de tous les rectangles ; on colore le reste en rouge.

Alors par un argument de connéxité on peut relier soit les deux côtés verticaux du grand rectangle par un chemin vert, soit les deux côtés horizontaux par un chemin rouge. Prenons le cas où c'est un chemin vert et parcourons ce chemin ; alors chaque fois qu'on quitte un rectangle pour passer dans un autre, ça se fait sur un segment vertical dont l'abscisse est une constante entière. Cela montre que le côté horizontal du grand rectangle est entier.

Exemple :



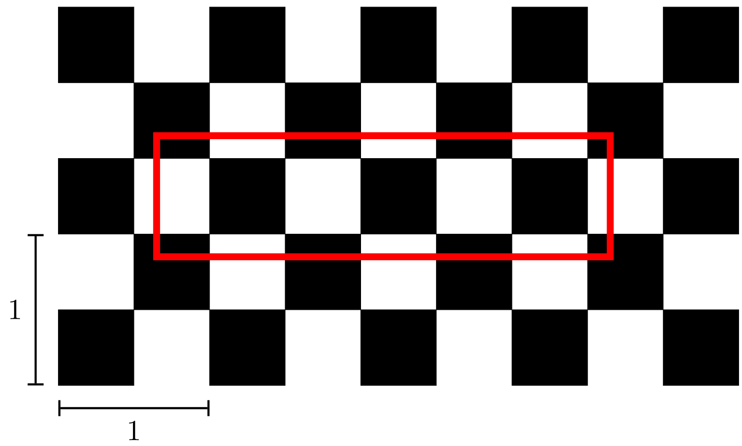
Cette solution très élégante ne s'adapte pas aux dimensions supérieures et nécessite la connaissance de notions de topologie.

Solution élémentaire (accéssible même aux collégiens !)

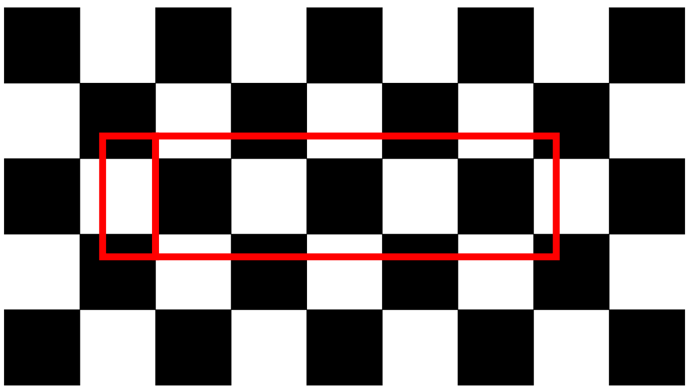
On considère un grand échiquier dont chaque case est de longueur $\frac{1}{2}$. Nous allons l'utiliser pour poser nos rectangles dessus.

Lemme 1. *Si un rectangle est entier alors il couvre autant de surface noire que blanche.*

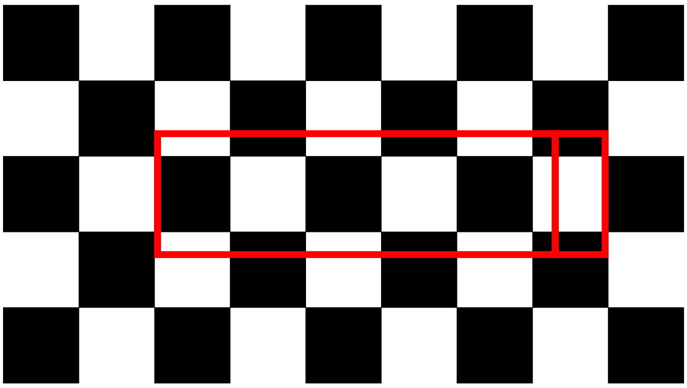
Preuve : Cela se verra plus facilement avec un dessin. Voici un rectangle dont le coté horizontal est 3 :



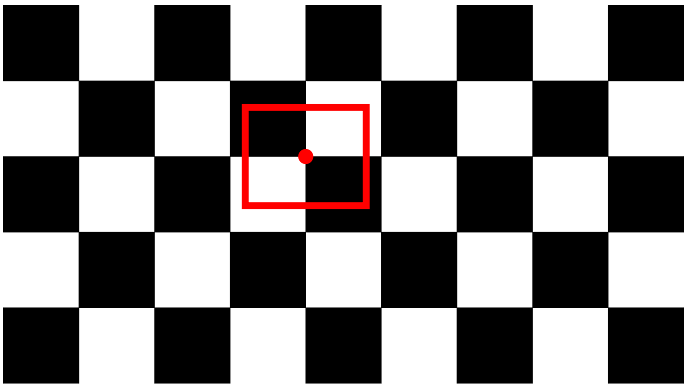
On le découpe,



puis on déplace la partie gauche à droite, sans que cela ne change la superficie blanche ou noire couverte.



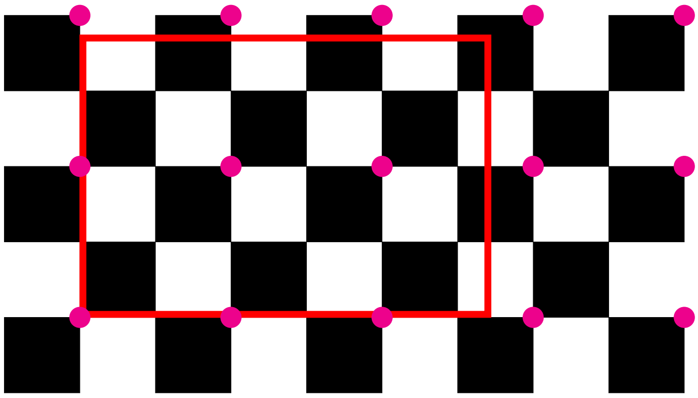
Il est maintenant évident que le rectangle couvre autant de superficie blanche que noire, ce qui achève la démonstration du lemme 1.
Remarque : La réciproque du lemme 1 n'est pas vraie. Comme contre-exemple il suffit de prendre un rectangle non-entier dont le milieu se trouve sur un point nœud de l'échiquier :



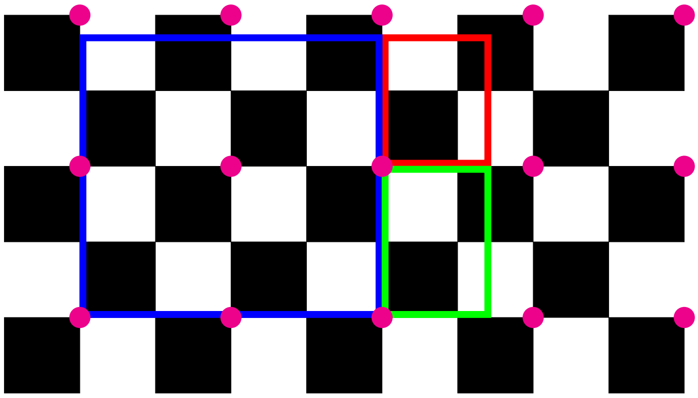
Mais si on rajoute une condition de plus les choses s'arrangent ! En effet, on a l'énoncé suivant.

Lemme 2. *Si un rectangle dont au moins un sommet coïncide avec un point nœud de l'échiquier couvre autant de surface noire que blanche alors il est entier.*

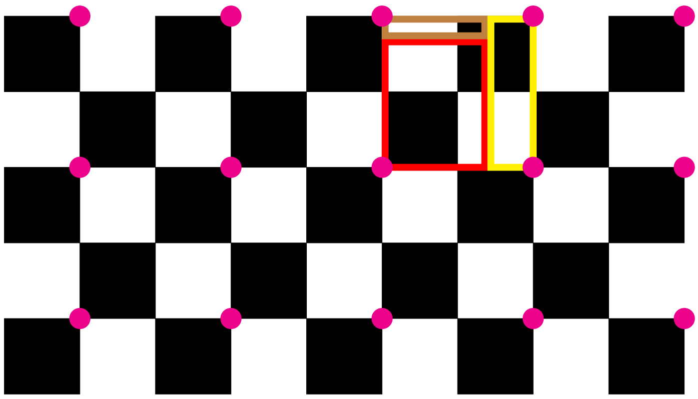
Preuve : Prenons le cas où le sommet en bas à gauche du rectangle coïncide avec un point nœud. Colorons ce nœud ainsi que les autres nœuds qui sont de coordonnées entières par rapport à lui. Nous supposons qu'aucun des autres trois sommets est sur un nœud coloré.



Pour examiner si le rectangle couvre autant de surface blanche que noire, nous le découpons ainsi :



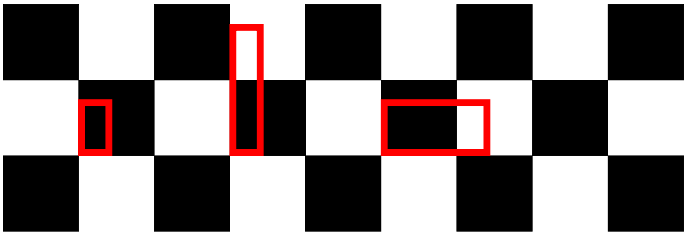
Le rectangle bleu a un côté horizontal entier et couvre donc, d'après le lemme 1, autant de surface noire que blanche. De même pour le rectangle vert car son côté vertical est entier. Il reste alors à examiner le petit rectangle rouge.



Le petit rectangle jaune couvre autant d'aire blanche que noire, tandis que le marron couvre plus d'aire blanche que noire. Par conséquence le petit rectangle rouge couvre plus de surface noire que blanche.

Nous avons donc démontré qu'un rectangle dont un unique sommet coïncide avec un nœud coloré ne peut pas couvrir autant d'aire blanche que noire. Donc si un rectangle a au moins un sommet sur un nœud coloré et couvre la même aire blanche que noire alors il a forcément un deuxième sommet sur un nœud coloré, et cela implique qu'il s'agit d'un rectangle entier. Le lemme 2 est ainsi démontré.

Remarque : En réalité, il y a quatre types petits rectangles restants mais nous n'avons traité qu'un seul type car pour les trois autres on voit immédiatement que les aires blanches et noires ne sont pas les mêmes :



Maintenant nous sommes prêts à donner la preuve du problème posé.

Nous plaçons notre grand rectangle de manière qu'un de ses sommet est sur un point nœud de l'échiquier. Par hypothèse tous les petits rectangles le constituant sont entiers, donc chacun couvre, d'après le lemme 1, autant d'aire blanche et que noire. Il en est de même du grand rectangle. D'après le lemme 2 il est entier.