Groupe de rotations et espace projectif

www.MathOMan.com

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on note $\mathbb{P}^n$ (*espace projectif de dimension* n) l'ensemble des droites vectorielles dans $\mathbb{R}^{n+1}$.
Le but de l'exercice est de montrer que

$$SO(2) \simeq \mathbb{P}^1 \qquad \text{et} \qquad SO(3) \simeq \mathbb{P}^3 .$$

Ici le symbole $\simeq$ signifie qu'il existe une bijection entre les ensembles concernés ; c'est clairement une relation d'équivalence.

Fixons les notations pour trois sous-ensembles importants de $\mathbb{R}^{n+1}$.

$$\begin{array}{lrcl} \text{la boule d'unité :} & B^{n+1} & = & \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 \leqslant 1\}\,, \\ \text{la sphère d'unité :} & S^n & = & \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1\}\,, \\ \text{l'hémisphère nord :} & S^n_+ & = & \{x \in S^n \mid x_{n+1} \geqslant 0\}\,. \end{array}$$

Le *bord* de la boule B^{n+1} est la sphère S^n. Chaque point $x \in S^n$ a son *antipode*, à savoir le point $-x \in S^n$.
Si on "recolle" B^{n+1} par identification des antipodes sur son bord, alors on obtient un nouvel ensemble que nous notons $B^{n+1}/\sim$.
De manière ensembliste on pourra écrire

$$B^{n+1}/\sim \quad = \quad \left(B^{n+1} \backslash S^n\right) \dot{\bigcup} \left\{\{x, -x\} \,|\, x \in S^n\right\}.$$

Questions

1) Quelle formes possèdent la boule B^n et de son bord S^{n-1} dans les cas $n = 1{,}2{,}3$?
2) Démontrer que $S^n_+ \simeq B^n$.
3) Démontrer que $B^n/\sim \; \simeq \mathbb{P}^n$.
4) Démontrer que $SO(2) \simeq \mathbb{P}^1$.
5) Démontrer que $SO(3) \simeq \mathbb{P}^3$.

Tournez la page !

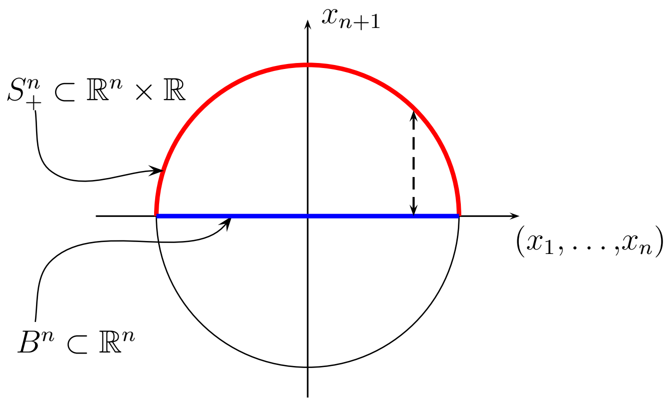
Réponses

1) B^1 est l'intervalle fermé $[-1,1]$ et son bord $S^0 = \{-1,1\}$ est constitué des deux extrémités. B^2 est un disque et son bord S^1 est un cercle. B^3 est une “vraie” boule et son bord S^2 est une “vraie” sphère.

2) Les deux applications suivantes sont bijectives car inverses l'une de l'autre.

$$
\begin{aligned}
B^n &\longrightarrow S^n_+\,, \quad (x_1,\ldots,x_n) \longmapsto \left(x_1,\ldots,x_n,\sqrt{1-x_1^2-\ldots-x_n^2}\,\right),\\
S^n &\longrightarrow B^n\,, \quad (x_1,\ldots,x_{n+1}) \longmapsto (x_1,\ldots,x_n)\,.
\end{aligned}
$$

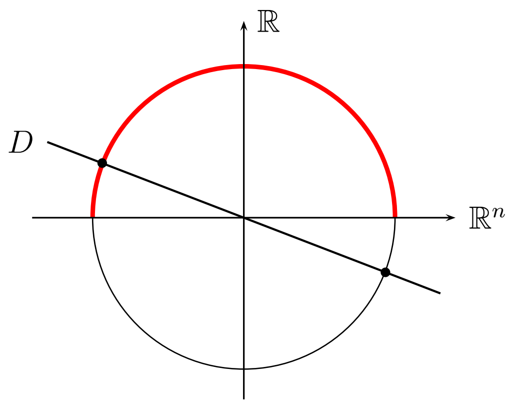
Illustration : si on projette l'hémisphère nord sur l'hyper-plan équatorial, on obtient la boule d'unité dans cet hyper-plan.



Notons que dans le graphique l'axe des abscisses représente l'espace $\mathbb{R}^n$. Il est instructif de comprendre ce dessin déjà pour les plus basses dimensions :

- Si $n = 1$, alors on est dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$. Le demi-cercle supérieur S^1_+ (en rouge) se projette bijectivement sur le segment B^1 (en bleu).
- Si $n = 2$, alors on est dans l'espace plan euclidien $\mathbb{R}^3$ et S^2 est une “vraie” sphère dont le dessin montre une coupe. L'hémisphère nord S^2_+ (en rouge) se projette bijectivement sur le disque B^2 (en bleu) situé dans le plan équatorial.

3) Chaque droite $D \in \mathbb{P}^n$ coupe la sphère S^n en deux antipodes : $\dfrac{x}{\|x\|}$ et $-\dfrac{x}{\|x\|}$ où x est arbitraire dans $D\backslash\{0\}$.
Au moins un des deux points est dans l'hémisphère nord :



De cette observation on déduit que l'application

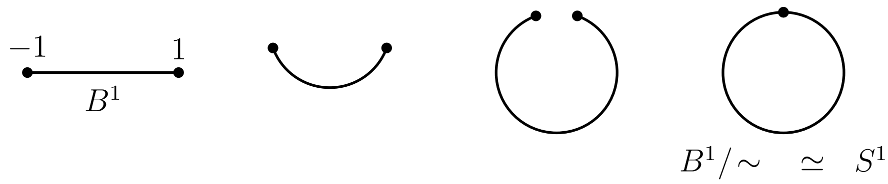
$$f \ : \quad S^n_+ \longrightarrow \mathbb{P}^n \ , \quad x \longmapsto \mathbb{R}x \ ,$$

est surjective ; en plus, en dehors de l'équateur elle est injective, tandis que deux antipodes sur l'équateur ont pour image la même droite. Plus précisément

$$\forall\, x,y \in S^n_+ \ : \quad \big[\, x \neq y \ \text{ et } \ f(x) = f(y) \,\big] \ \Longrightarrow \ \big[\, x = -y \quad \text{et} \quad x_{n+1} = y_{n+1} = 0 \,\big] \,.$$

Par conséquence $\mathbb{P}^n$ est en bijection avec l'ensemble obtenu à partir de S^n_+ par identification des antipodes sur l'équateur. Or d'après la question précédente nous savons que $S^n_+ \ \simeq \ B^n$ et l'équateur n'est rien d'autre que le bord S^{n-1} de B^n. Par conséquence $\mathbb{P}^n \ \simeq \ B^n/\!\sim$.

4) Le résultat précédent implique en particulier que $\mathbb{P}^1 \ \simeq \ B^1/\!\sim$.
Or $B^1 = [-1,1]$ et par conséquence $B^1/\sim$ est simplement l'intervalle $[-1,1]$ où on a recollé les points -1 et 1. Ainsi $B^1/\sim$ est en bijection avec le cercle S^1. Illustration :



Nous obtenons $\mathbb{P}^1 \ \simeq \ S^1$. D'autre part $SO(2)$ est le groupe des rotations du plan euclidien orienté $\mathbb{R}^2$. Comme chaque rotation est déterminée de manière unique par son angle compris dans $[0,2\pi[$ il est évident que $SO(2)$ est en bijection avec le cercle S^1.
Conclusion : $SO(2) \simeq \mathbb{P}^1$.

5) Les éléments de $SO(3)$ sont les rotations de l'espace euclidien orienté $\mathbb{R}^3$. Chaque rotation est déterminée de manière unique par son axe dirigé et son angle de rotation compris dans $[-\pi,\pi[$.
Pour un axe dirigé D et un angle $\alpha \in \mathbb{R}$ donnés notons $\rho(D,\alpha)$ la rotation correspondante. Considérons l'application

$$g \ : \quad B^3 \longrightarrow SO(3) \ , \quad x \longmapsto \begin{cases} id_{\mathbb{R}^3} & \text{si } \ x = 0 \,, \\ \rho\big(D_x,\pi\|x\|\big) & \text{si } \ x \neq 0 \,, \end{cases}$$

où D_x désigne l'axe dirigé par le vecteur x. Par construction g est surjective et injective à l'intérieur de la boule B^3. Mais sur son bord, c'est-à-dire sur la sphère S^2, deux antipodes sont envoyés sur une même rotation ; en effet, effectuer un demi-tour dans un sens revient à effectuer un demi-tour dans l'autre. Plus précisément on a

$$\forall\, x,y \in B^3 \ : \quad \big[\, x \neq y \ \text{ et } \ g(x) = g(y) \,\big] \ \Longrightarrow \ \big[\, x = -y \ \text{ et } \ x,y \in S^2 \,\big] \,.$$

Cela signifie que $SO(3)$ est en bijection avec $B^3/\!\sim$. D'après le résultat de la troisième question on sait que $\mathbb{P}^3 \ \simeq \ B^3/\!\sim$, d'où finalement $SO(3) \simeq \mathbb{P}^3$.