Revisitons la multiplication !

www.MathOMan.com

Vous croyez déjà tout savoir sur la multiplication ? Vous allez être surpris !
Voici trois méthodes pour la multiplication de deux nombres entiers.

- *Algorithme classique du bon élève.*

$$\begin{array}{rrrrrrr} & & & 3 & 6 & \times & 5 \quad 4 \\ \hline & & 1 & 4 & 4 & & \\ + & 1 & 8 & 0 & & & \\ \hline = & 1 & 9 & 4 & 4 & & \end{array}$$

- *Méthode du cancre.*

$$\begin{array}{rrrcrrrr} & 3 & 6 & \times & & & 5 & 4 \\ \hline & 1 & 8 & & & 1 & 0 & 8 \\ & & 9 & & & 2 & 1 & 6 \\ & & 4 & & & 4 & 3 & 2 \\ & & 2 & & & 8 & 6 & 4 \\ + & & 1 & & 1 & 7 & 2 & 8 \\ \hline = & & & & 1 & 9 & 4 & 4 \end{array}$$

Dans la colonne gauche on prend toujours la moitié en arrondissant éventuellement vers le bas ; à droite on prend toujours le double. Puis on supprime les lignes dont le nombre gauche est pair et on additionne la colonne droite.

- *Méthode de Karatsuba (1962).*
On sépare chaque facteur en deux parties 36×54, puis on effectue les multiplications suivantes :

$$\begin{aligned} A &= 3 \times 5 = 15 \\ B &= 6 \times 4 = 24 \\ C &= (3+6) \times (5+4) - A - B = 81 - 15 - 24 = 42\,. \end{aligned}$$

Le résultat est ensuite

$$\begin{aligned} 36 \times 54 &= A \times 10^2 + C \times 10 + B \\ &= 1500 + 420 + 24 = 1944\,. \end{aligned}$$

Remarque : L'idée est de se ramener à des opérations élémentaires (opérations entre deux nombres entre 0 et 9). Sur un ordinateur le choix d'un bon algorithme peut accélerer considérablement le temps de calcul (quelques semaines pour des facteurs constitués de plusieurs milliards de chiffres).

Questions

1) Pourquoi la méthode du cancre fonctionne-t-elle ? Les deux facteurs jouent des rôles différents ; lequel choisir pour quel rôle ?

2) Utilisez la méthode de Karatsuba pour calculer

$$3116 \times 1014 \,.$$

Pourquoi cette méthode fonctionne-t-elle ?

3) Avec l'algorithme classique, combien de multiplications élémentaires sont nécessaires pour calculer le produit de deux nombres à n chiffres ?

4) En réitérant la méthode de Karatsuba on obtient un algorithme. Combien de multiplications élémentaires sont alors nécessaires pour calculer le produit de deux nombres à n chiffres ? Comparer avec l'algorithme classique.

Tournez la page pour les réponses !

Réponses

1) Nous formons le produit $u \times v$ des deux nombres dans une ligne $\boxed{u \quad v}$ et le comparons au produit dans la ligne suivant.

- Si u est pair, les deux lignes consécutifs sont

$$\boxed{\begin{array}{ll} u & v \\ u/2 & v \times 2 \end{array}}$$

On voit donc que le produit ne change pas d'une ligne à l'autre.

- Si u est impair, il faut arrondir $u/2$, donc les deux lignes consécutifs sont

$$\boxed{\begin{array}{ll} u & v \\ u/2 - 1/2 & v \times 2 \end{array}}$$

Ici le produit n'est plus le même dans les deux lignes. Mais si on additionne v au produit dans la seconde on obtient le produit dans la première.

Supposons pour un instant que le premier facteur du produit à calculer est une puissance de deux. Dans ce cas on peut toujours diviser par 2 sans arrondir, donc le produit reste le même pour toutes les lignes. En particulier il est égal au nombre qui se trouve à coté du 1 de la dernière ligne.
Et dans le cas général, s'il fallait arrondir quelque part, on comprense, d'après ce qu'on vient de voir, en ajoutant tous les nombres à droite d'un nombre gauche impair.
Evidemment pour minimiser le nombre d'étapes on écrit à gauche le facteur plus petit.

2) On obtient

$$\begin{aligned} A &= 31 \times 10 = 310 \\ B &= 16 \times 14 = 224 \\ C &= (31 + 16) \times (10 + 14) - A - B \\ &= 1128 - 310 - 224 = 594 \end{aligned}$$

et ensuite

$$3116 \times 1014 = 3100000 \ + \ 59400 \ + \ 224 = 3159624\,.$$

Démontrons maintenant que cette méthode marche toujours. Quitte à ajouter des zéros devant les facteurs a et b on peut supposer qu'ils ont le même nombre n de chiffres, et que ce nombre est pair, $n = 2k$. On peut alors écrire, avec $\alpha,\alpha',\beta,\beta' \in [\![0,10^k - 1]\!]$,

$$\begin{aligned} ab &= (\alpha \times 10^k + \alpha')(\beta \times 10^k + \beta') \\ &= \alpha\beta \times 10^{2k} + (\alpha\beta' + \alpha'\beta) \times 10^k + \alpha'\beta'\,. \end{aligned}$$

Pour conclûre il suffit de de remarquer que

$$\begin{aligned} A &= \alpha\beta \\ B &= \alpha'\beta' \\ C &= \alpha\beta' + \alpha'\beta = (\alpha + \alpha')(\beta + \beta') - \alpha\beta - \alpha'\beta'\,. \end{aligned}$$

3) Il faut effectuer n^2 multiplications élémentaires avec l'algorithme classique.

4) Nous verrons que l'algorithme de Karatsuba est plus efficace. Quitte à ajouter des zéros devant les facteurs a et b on peut supposer que n est une puissance de 2, c'est-à-dire $n = 2^k$.
Dans la première étape de l'algorithme il faut donc faire 3 multiplications d'entiers dont le nombres de chiffres est $n/2 = 2^{k-1}$.
Dans la seconde étape de l'algorithme il faut donc faire 3^2 multiplications d'entiers dont le nombres de chiffres est $n/4 = 2^{k-2}$.
En fin de compte on effectue 3^k multiplications élémentaires.[1]
En remarquant que $n = 2^k$ implique $k = \ln n / \ln 2$ on trouve finalement

$$3^k = \left(3^{\ln n}\right)^{\frac{1}{\ln 2}} = \left(n^{\ln 3}\right)^{\frac{1}{\ln 2}} = n^{\frac{\ln 3}{\ln 2}} \approx n^{1,58} .$$

L'algorithme de Karatsuba présente une grande économie de calcul par rapport à l'algorithme classique. En effet $n^{1,58}$ est beaucoup plus petit que n^2 si n est très grand.

Et qu'en est-il des additions, elles ne comptent pas ?
Si ! Dans le cas de l'algorithme classique on voit que le nombre d'additions élémentaires est de l'ordre n^2. Le nombre total d'opérations élémentaires est donc toujours de l'ordre n^2.
L'algorithme de Karatsuba est mieux, car le nombre d'additions élémentaires est d'ordre n, ce qui est négligeable devant $n^{1,58}$.

1. Plus précisément au plus 3^k car on a éventuellement ajouté des zéros devant les facteurs.