Mathematisches Trivium[1]
V.I. Arnold

Das Niveau der mathematischen Kultur fällt; die an unseren Hochschulen (einschließlich der mechanisch-mathematischen Fakultät der Moskauer Staatlichen Universität MGU) ausgebildeten Studenten und Aspiranten werden nicht minder unwissend als die Professoren und Hochschullehrer. Worin liegt die Ursache dieser unnormalen Erscheinung? Unter normalen Bedingungen kennen die Studenten und Aspiranten ihre Wissenschaft besser als die Professoren, was dem allgemeinen Prinzip der Verbreitung von Wissen entspricht: das Neue setzt sich nicht deswegen durch, weil die Alten es erlernen, sondern weil neue Generationen kommen, die es beherrschen.

Unter der Vielzahl von Ursachen, die diese unnormale Situation hervorgerufen haben, möchte ich jene betrachten, welche von uns selbst abhängen, um das, was in unseren Kräften liegt, wiedergutzumachen. Eine dieser Ursachen ist meiner Meinung nach unser Prüfungssystem, welches speziell auf die systematische Erzeugung von Ausschuß, d.h. von Pseudowissenschaftlern ausgelegt ist, welche Mathematik wie Marxismus lernen, indem sie die Formulierungen und Antworten auf die am häufigsten vorkommenden Prüfungsfragen pauken.

Wodurch wird das Niveau der Ausbildung eines Mathematikers bestimmt? Weder durch die Aufzählung der Kurse, noch durch ihre Inhaltsangabe! Die einzige Methode festzustellen, was wir unseren Studenten wirklich beigebracht haben, besteht darin, die Aufgaben aufzuzählen, die sie nach ihrer Ausbildung lösen können sollten.

Gemeint sind hier nicht irgendwelche schwierige Aufgaben, sondern jene einfachen Fragen, die ein streng notwendiges Minimum darstellen. Dies müssen nicht unbedingt viele Aufgaben sein, aber die Fähigkeit diese zu lösen muß rigoros verlangt werden. I.E. Tamm erzählte, daß er während des Bürgerkrieges von Weißgardisten gefangen genommen wurde und während des Verhörs angab, an einer physikalisch-mathematischen Fakultät studiert zu haben. Um zu überprüfen, ob er die Wahrheit sagt, wurde ihm sofort eine Aufgabe aus der Theorie der Reihen gestellt. Er verdankt sein Leben der Tatsache, daß er sie lösen konnte. Unsere Studenten müssen auf solche Prüfungen vorbereitet sein!

In der ganzen Welt besteht die Mathematikprüfung im schriftlichen Lösen von Aufgaben. Der schriftliche Charakter von Leistungsnachweisen wird überall als ein genauso notwendiges Merkmal der Demokratie angesehen, wie etwa die Wahl aus mehreren Kandidaten. Tatsächlich ist der Student in mündlichen Prüfungen vollkommen schutzlos. Als ich Prüfungen am Lehrstuhl für Differentialgleichungen der mechanisch-mathematischen Fakultät der MGU abnahm, habe ich am Nachbartisch Prüfer erlebt, welche Studenten durchfallen ließen, die vollkommen richtige Antworten gaben (möglicherweise auf einem Niveau, welches über dem des prüfenden Hochschullehrers lag). Es sind auch Fälle bekannt, in denen man Studenten absichtlich durchfallen ließ (manchmal kann man dies durch rechtzeitiges Hinzukommen verhindern).

Die schriftliche Arbeit ist ein Dokument und der Prüfer ist bei ihrer Korrektur unbewußt objektiver (insbesondere dann, wenn, wie es auch sein sollte, die Arbeit für ihn anonym ist).

Es gibt noch einen weiteren wichtigen Vorteil schriftlicher Prüfungen: die Aufgaben gehen nicht verloren und können den Studenten der nächsten Jahrgänge für die Prüfungsvorbereitung weitergegeben werden. Außerdem zeigen sie das Niveau des Kurses und des Hochschullehrers, der sie zusammengestellt hat. Seine Stärken und Schwächen werden sofort sichtbar, und Spezialisten sind sofort in der Lage, den Vorlesenden danach zu beurteilen, was er den Studenten beibringen wollte, und was er ihnen beigebracht hat.

Übrigens werden in Frankreich für den landesweiten "Concours général" die Aufgaben durch Lehrer zusammengestellt, welche ihre Aufgabenvorschläge nach Paris einschicken, wo die besten ausgewählt werden. Das Ministerium erhält somit objektive Informationen über das Niveau seiner Lehrer, indem es sowohl die eingeschickten Aufgaben als auch die Resultate der Schüler vergleichen kann. Im Gegensatz dazu werden bei uns, wie wir wissen, Lehrer und Hochschullehrer nach Äußerlichkeiten, Gewandheit der Sprache und ideologische "Richtigkeit" beurteilt.

Somit ist es nicht erstaunlich, daß man unsere Diplome nicht anerkennen will (ich denke, das wird in Zukunft auch die Mathematikdiplome betreffen). Noten, die man in keine Spuren hinterlassenden mündlichen Prüfungen erhält, und die man somit nicht objektiv vergleichen kann, haben ein verschwommenes und sehr relatives Gewicht, welches voll und ganz von dem Niveau der Ausbildung und den Anforderungen der jeweiligen Hochschule abhängt. Bei denselben Ausbildungsprogrammen und gleichen

[1] Uspechi Matematitscheskich Nauk, Band 46 (1), 1991, Seite 225 ff

Noten können sich Wissen und Fähigkeit der Diplomanden um Größenordnungen unterscheiden (im verständlichen Sinne). Hinzu kommt, daß man mündliche Prüfungen viel einfacher falsifizieren kann (was auch bei uns an der mechanisch-mathematischen Fakultät der MGU passiert, wo man, wie einstmals ein blinder Hochschullehrer sagte, einem Studenten, der zwar sehr nahe am Lehrbuch antwortet, jedoch keine einzige Frage beantworten kann, eine gute Note geben muß).

Das Wesen und die Nachteile unserer mathematischen Ausbildung sind hervorragend in den Erinnerungen von R. Feynman beschrieben ("Sie belieben wohl zu scherzen, Mr. Feynman", das Kapitel über die Physikausbildung in Brasilien).

Nach den Worten von Feynman verstehen diese Studenten gar nichts, stellen aber nie Fragen und tun so, als würden sie alles verstehen. Fängt nun jemand an Fragen zu stellen, so wird er durch die anderen Studenten schnell auf seinen Platz verwiesen, als jemand der die Zeit des Vorlesenden und der mitschreibenden Studenten vergeudet. Im Ergebnis kann keiner etwas von dem gelernten Stoff in irgendeiner Aufgabe anwenden. Die Prüfungen aber (genauso dogmatisch wie unsere: "formulieren Sie die Definition, formulieren Sie das Theorem") werden erfolgreich abgelegt. Die Studenten kommen in den Zustand einer "sich selbstausbreitenden Pseudogelehrtheit" und bilden die folgenden Generationen auf ähnliche Art und Weise aus. Aber diese Tätigkeit ist vollkommen sinnlos, und faktisch ist unsere Ausbildung von Spezialisten in großem Maße Betrug: diese sog. Spezialisten sind nicht in der Lage die einfachsten Aufgaben zu lösen, sie beherrschen die Elemente ihres Handwerks nicht.

Zusammenfassend: *um diesem Betrug ein Ende zu machen, muß man nicht eine Liste von Theoremen, sondern eine Liste von Aufgaben fixieren, die Studenten lösen können müssen. Diese Aufgaben sollten alljährlich publiziert werden (ich stelle mir vor, daß die Liste etwa zehn Aufgaben pro Semesterkurs enthalten sollte).* Dann werden wir sehen, was wir unsere Studenten wirklich lehren, und wie uns das gelingt. Damit die Studenten lernen ihre Wissenschaft anzuwenden, *müssen alle Prüfungen schriftlich durchgeführt werden.*

Natürlich werden die Aufgaben von Hochschule zu Hochschule und von Jahr zu Jahr variieren. Dann wird man das Niveau der verschiedenen Hochschullehrer und Jahrgänge vergleichen können. Ein Student, der für die Berechnung des Mittelwertes der hundertsten Potenz des Sinus mit zehnprozentiger Genauigkeit wesentlich mehr als fünf Minuten braucht, beherrscht die Mathematik nicht, auch wenn er sich mit universellen Algebren, Supermannigfaltigkeiten u.s.w. beschäftigt hat.

Die Zusammenstellung von Musteraufgaben erfordert viel Arbeit, aber ich denke es ist notwendig dies zu tun. Als Versuch schlage ich im folgenden eine Sammlung von hundert Aufgaben vor, die als mathematisches Minimum für einen Physikstudenten zusammengestellt wurde. Diese Musteraufgaben sind (im Unterschied zu Lehrprogrammen) nicht eindeutig, und viele werden möglicherweise dieser Liste nicht zustimmen. Dessen ungeachtet halte ich es für notwendig, mit der Zusammenstellung von Musteraufgaben und der Fixierung des Niveaus der mathematischen Anforderungen durch schriftliche Prüfungen zu beginnen. Es wäre zu hoffen, daß in Zukunft die Studenten eine Liste von Musteraufgaben zu jedem Kurs, zu jeder Vorlesung am Anfang des Semesters erhalten und die zum Pauken verleitenden mündlichen Prüfungen in die Vergangenheit verschwinden werden.

1. Man zeichne den Graph der Ableitung und den Graph des Integrals einer Funktion, die durch einen frei gezeichneten Graph vorgegeben ist.

2. Man finde den Grenzwert

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin\tan x - \tan\sin x}{\arcsin\arctan x - \arctan\arcsin x}.$$

3. Man finde die kritischen Werte und kritischen Punkte der Abbildung $z \mapsto z^2 + 2\bar{z}$ (Skizzieren Sie die Antwort).

4. Berechnen Sie die hundertste Ableitung der Funktion

$$\frac{x^2+1}{x^3-x}.$$

5. Berechnen Sie die hundertste Ableitung der Funktion

$$\frac{1}{x^2+3x+2}$$

im Nullpunkt mit einer Genauigkeit von 10%.

6. Zeichnen Sie in der Fläche (x, y) die parametrisch vorgegebene Kurve

$$x = 2t - 4t^3\,, \quad y = t^2 - 3t^4\,.$$

7. Wieviel Normalen kann man aus einem gegebenen Punkt der Ebene an eine Ellipse zeichnen? Untersuchen Sie das Gebiet, in dem die Anzahl der Normalen maximal ist.

8. Wieviel Maxima, Minima und Sattel hat die Funktion $x^4+y^4+z^4+u^4+v^4$ auf der Fläche $x+\cdots+v=0$, $x^2+\cdots+v^2=1$, $x^3+\cdots+v^3=C$?

9. Erreicht jedes positive Polynom zweier reeller Veränderlicher auf der Ebene seine untere Schranke?

10. Man untersuche das asymptotische Verhalten derjenigen Lösungen y der Gleichung $x^5+x^2y^2=y^6$, die für $x \to 0$ gegen 0 gehen.

11. Man untersuche die Konvergenz des Integrals

$$\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx\,dy}{1+x^4y^4}\,.$$

12. Man finde den Fluß des Vektorfeldes $\vec{r}/r^3$ durch die Fläche $(x-1)^2+y^2+z^2=2$.

13. Berechnen Sie mit 5% Genauigkeit

$$\int\limits_1^{10} x^x\,dx\,.$$

14. Berechnen Sie mit 10% Genauigkeit

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} (x^4+4x+4)^{-100}\,dx\,.$$

15. Berechnen Sie mit 10% Genauigkeit

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \cos\big(100(x^4-x)\big)\,dx\,.$$

16. Welchen Volumenanteil von einem fünfdimensionalen Würfel hat die in ihn einbeschriebene Kugel? Und von einem zehndimensionalen Würfel?

17. Man finde den Abstand des Massenmittelpunktes einer 100-dimensionalen Halbkugel vom Zentrum der Kugel mit 10% Genauigkeit.

18. Man berechne
$$\int \cdots \int \exp\Big(-\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} x_i x_j\Big)\, dx_1 \ldots dx_n\,.$$

19. Man untersuche den Strahlenverlauf in einem ebenen Medium mit dem Brechungsindex $n(y) = y^4 - y^2 + 1$ mittels des Spelliusschen Gesetzes: $n(y)\sin(\alpha) = \mathrm{const}$, wobei α der Winkel des Strahles mit der y-Achse ist.

20. Finden Sie die Ableitung der Lösung der Gleichung $\ddot{x} = x + A\dot{x}^2$ mit den Anfangsbedingungen $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 0$ nach dem Parameter A bei $A = 0$.

21. Finden Sie die Ableitung der Lösung der Gleichung $\ddot{x} = \dot{x}^2 + x^3$ mit den Anfangsbedingungen $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = A$ nach dem Parameter A bei $A = 0$.

22. Untersuchen Sie den Rand des Stabilitätsgebiets ($\max \operatorname{Re} \lambda_j < 0$) im Raum der Koeffizienten der Gleichung $\dddot{x} + a\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0$.

23. Lösen Sie die quasihomogene Gleichung
$$\frac{dy}{dx} = x + \frac{x^3}{y}\,.$$

24. Lösen Sie die quasihomogene Gleichung $\ddot{x} = x^5 + x^2\dot{x}$.

25. Kann eine asymptotisch stabile Gleichgewichtslage durch Linearisierung instabil nach Lyapunov werden?

26. Man untersuche das Verhalten der Lösungen folgender Systeme
$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = 2\sin y - y - x \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = 2x - x^3 - x^2 - \varepsilon y \end{cases}$$
für $t \to +\infty$, wobei $\varepsilon \ll 1$ ist.

27. Zeichnen Sie das Aussehen der Lösungen der Gleichung
$$\ddot{x} = F(x) - k\dot{x}\,, \quad F = -dU/dx$$
in der (x, E)-Ebene in der Nähe der nichtentarteten kritischen Punkte des Potentials U, wobei $E = \dot{x}^2/2 + U(x)$ ist.

28. Zeichnen Sie das Phasenportrait der Gleichung
$$\dot{z} = \varepsilon z - (1+i)z\,|z|^2 + \bar{z}^4$$
und untersuchen Sie sein Verhalten in Abhängigkeit des kleinen komplexen Parameters ε.

29. Eine Ladung bewegt sich mit der Geschwindigkeit 1 in einer Ebene unter dem Einfluß eines zu ihr senkrechten Magnetfeldes $B(x, y)$. In welche Richtung driftet das Zentrum des Larmor-Kreises? Berechnen Sie die Geschwindigkeit dieser Drift (in erster Näherung). [Mathematisch gesehen geht es um Kurven der Krümmung NB für $N \to \infty$.]

30. Man finde die Summe der Indizes der besonderen Punkte des Vektorfeldes $z\bar{z}^2 + z^4 + 2\bar{z}^4$, die von Null verschieden sind.

31. Finden Sie den Index des besonderen Punktes 0 des Vektorfeldes mit den Komponenten

$$(x^4 + y^4 + z^4,\ x^3y - xy^3,\ xyz^2)\,.$$

32. Man finde den Index des besonderen Punktes 0 des Vektorfeldes $\operatorname{grad}(xy + yz + xz)$.

33. Man finde den Verbindungskoeffizienten der Phasentrajektorien für die Schwingungsgleichungen $\ddot{x} = -4x$, $\ddot{y} = -9y$ auf der Niveaufläche der Gesamtenergie.

34. Untersuchen Sie die besonderen Punkte der Kurve $y = x^3$ in der projektiven Ebene.

35. Zeichnen Sie die Geodäten auf der Fläche $(x^2 + y^2 - 2)^2 + z^2 = 1$.

36. Zeichnen Sie die Evolventen der kubischen Parabel $y = x^3$ (die Evolvente ist die geometrische Kurve $\vec{r}(s) + (c - s)\,\dot{\vec{r}}(s)$, wobei s die Länge entlang der Kurve $\vec{r}(s)$ und c eine Konstante ist).

37. Man beweise, daß diejenigen durch die Gleichung

$$\big((A - \lambda E)^{-1}x, x\big) = 1$$

beschriebenen Flächen im euklidischen Raum, die durch einen Punkt x hindurchgehen und unterschiedlichen Werten von λ entsprechen (A ist ein symmetrischer Operator ohne entartete Eigenwerte), paarweise orthogonal sind.

38. Berechnen Sie das Integral der Gaußschen Krümmung der Fläche

$$z^4 + (x^2 + y^2 - 1)(2x^2 + 3y^2 - 1) = 0\,.$$

39. Man berechne das Gaußsche Integral

$$\oiint \frac{(d\vec{A}, d\vec{B}, \vec{A} - \vec{B})}{|\vec{A} - \vec{B}|^3}\,,$$

wobei $\vec{A}$ auf der Kurve $x = \cos\alpha$, $y = \sin\alpha$, $z = 0$ und $\vec{B}$ auf der Kurve $x = 2\cos^2\beta$, $y = \frac{1}{2}\sin\beta$, $z = \sin 2\beta$ läuft.

40. Man führe eine Parallelverschiebung eines Vektors, der in Leningrad (60° Breite) nach Norden zeigt, entlang des Breitengrades von West nach Ost durch.

41. Man finde die geodätische Krümmung der Geraden $y = 1$ in der oberen Halbebene, die mit der Lobatschewski-Poincare Metrik

$$ds^2 = (dx^2 + dy^2)/y^2$$

versehen ist.

42. Schneiden sich die Mediane eines Dreiecks in der Lobatschewski-Ebene in einem Punkt? Und ihre Höhen?

43. Man finde die Betti-Zahlen der Fläche $x_1^2 + \cdots + x_k^2 - y_1^2 - \cdots - y_l^2 = 1$ und der Menge $x_1^2 + \cdots + x_k^2 \leqslant 1 + y_1^2 + \cdots + y_l^2$ im $(k + l)$-dimensionalen linearen Raum.

44. Man finde die Betti-Zahlen der Fläche $x^2 + y^2 = 1 + z^2$ im dreidimensionalen projektiven Raum. Dasselbe für die Flächen $z = xy$, $z = x^2$, $z^2 = x^2 + y^2$.

45. Man finde den Index der Selbstschneidung der Fläche $x^4 + y^4 = 1$ in der projektiven Ebene $\mathbb{CP}^2$.

46. Man bilde das Innere des Einheitskreises konform in den ersten Quadranten ab.

47. Man bilde das Äußere eines Kreises konform auf das Äußere einer gegebenen Ellipse ab.

48. Man bilde die Halbebene ohne einer zu ihrem Rand senkrechten Strecke konform auf die Halbebene ab.

49. Man berechne

$$\oint\limits_{|z|=2} \frac{dz}{\sqrt{1+z^{10}}} \, .$$

50. Man berechne

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{1+x^2} \, dx \, .$$

51. Man berechne das Integral

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \frac{1-e^x}{1+e^x} \, dx \, .$$

52. Man berechne das erste Glied der Asymptotik des Integrals

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx} \, dx}{\sqrt{1+x^{2n}}}$$

bei $k \to \infty$.

53. Man untersuche die besonderen Punkte der Differentialform $dt = dx/y$ auf der kompakten Riemannschen Fläche $y^2/2 + U(x) = E$, wobei U ein Polynom und E kein kritischer Wert ist.

54. $\ddot{x} = 3x - x^3 - 1$. In welchem der Täler (im tieferen oder im flacheren) ist die Schwingungsperiode bei gleichen Werten der Gesamtenergie größer?

55. Man untersuche die Topologie der Riemannschen Fläche der Funktion $w = \arctan x$.

56. Wieviel Henkel hat die Riemannsche Fläche der Funktion $w = \sqrt{1+z^n}$?

57. Untersuchen Sie die Dimension des Lösungsraumes der Aufgabe $\partial u/\partial \bar{z} = \delta(z-i)$ bei $\operatorname{Im} z \geqslant 0$, $\operatorname{Im} u(z) = 0$ bei $\operatorname{Im} z = 0$, $u \to 0$ bei $z \to \infty$.

58. Untersuchen Sie die Dimension des Lösungsraumes der Aufgabe $\partial u/\partial \bar{z} = a\delta(z-i) + b\delta(z+i)$ bei $|z| \leqslant 2$, $\operatorname{Im} u = 0$ bei $|z| = 2$.

59. Man untersuche die Existenz und die Eindeutigkeit der Lösung der Aufgabe $yu_x = xu_y$, $u|_{x=1} = \cos y$ in der Umgebung des Punktes $(1, y_0)$.

60. Man untersuche die Existenz und die Eindeutigkeit der Lösung der Cauchy-Aufgabe

$$x\left(x^2+y^2\right)\frac{\partial u}{\partial x} + y^3 \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \, , \quad u|_{y=0} = 1$$

in der Umgebung des Punktes $(x_0, 0)$ der x-Achse.

61. Welches ist das größte t, für das die Lösung der Aufgabe

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = \sin x\,, \quad u|_{t=0} = 0$$

auf das Intervall $[0, t)$ fortsetzbar ist?

62. Man finde alle Lösungen der Gleichung $y\,\partial u/\partial x - \sin x\,\partial u/\partial y = u^2$ in der Umgebung des Punktes $(0, 0)$.

63. Existiert die Lösung der Cauchy-Aufgabe $y\,\partial u/\partial x + \sin x\,\partial u/\partial y = y$, $u|_{x=0} = y^4$ in der ganzen Ebene (x, y)? Gibt es nur eine Lösung?

64. Hat die Cauchy-Aufgabe $u|_{y=x^2} = 1$, $(\nabla u)^2 = 1$ eine glatte Lösung im Gebiet $y \geqslant x^2$? Und im Gebiet $y \leqslant x^2$?

65. Man finde den Mittelwert der Funktion $\ln r$ auf dem Kreis $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ (dasselbe für die Funktion $1/r$ auf der Sphäre).

66. Man löse die Dirichlet-Aufgabe

$$\begin{array}{lll} \Delta u = 0 & \text{bei} & x^2 + y^2 < 1, \\ u = 1 & \text{bei} & x^2 + y^2 = 1,\ y > 0\,, \\ u = -1 & \text{bei} & x^2 + y^2 = 1,\ y < 0\,. \end{array}$$

67. Welche Dimension hat der Raum derjenigen Lösungen der Aufgabe

$$\Delta u = 0 \quad \text{bei} \quad x^2 + y^2 > 1\,, \quad \partial u/\partial n = 0 \quad \text{bei} \quad x^2 + y^2 = 1$$

die bei $x^2 + y^2 \geqslant 1$ stetig sind?

68. Man finde

$$\inf \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 dx\,dy$$

nach C^∞-Funktionen u, die bei 0 gleich 0 sind, und auf dem Kreis $x^2 + y^2 = 1$ gleich 1 sind.

69. Man beweise, daß der Raumwinkel der sich auf eine gegebene geschlossene Kontur stützt, außerhalb der Kontur eine harmonische Funktion des Scheitelpunktes ist.

70. Man berechne den Mittelwert des Raumwinkels, unter dem man den Kreis $x^2 + y^2 \leqslant 1$, der in der Ebene $z = 0$ liegt, aus den Punkten der Sphäre $x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 1$ sieht.

71. Man berechne die Ladungsdichte auf dem leitfähigen Rand $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ des Hohlraumes, in dem sich eine Ladung $q = 1$ im Abstand r vom Zentrum befindet.

72. Man berechne in erster Näherung nach ε den Einfluß der Erdabplattung ($\varepsilon \approx 1/300$) auf das Gravitationsfeld der Erde im Mondabstand (man betrachte die Erde als homogen).

73. Man finde in erster Näherung nach ε den Einfluß der Nichtidealität eines fast sphärischen Kondensators $R = 1 + \varepsilon f(\varphi, \theta)$ auf seine Kapazität.

74. Zeichnen Sie den Graphen von $u(x, 1)$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,, \quad u|_{t=0} = x^2\,, \quad u|_{x^2=x} = x^2$$

im Intervall $0 \leqslant x \leqslant 1$.

75. Infolge jährlicher Temperaturschwankungen gefriert die Erde in der Stadt N auf einer Tiefe von 2 Metern. Auf welcher Tiefe würde sie infolge täglicher Schwankungen derselben Amplitude gefrieren?

76. Man untersuche das Verhalten der Lösung der Aufgabe

$$u_t + (u \sin x)_x = \varepsilon u_{xx}\,, \quad u|_{t=0} \equiv 1\,, \quad \varepsilon \ll 1$$

für $t \to +\infty$.

77. Man finde die Eigenwerte des Laplace-Operators $\Delta = \operatorname{div}\operatorname{grad}$ auf der Sphäre mit dem Radius R im euklidischen Raum der Dimension n und ihre Vielfachheiten.

78. Man löse die Cauchy-Aufgabe

$$\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = 9\,\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} - 2B\,, \quad \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} = 6\,\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} - 2A\,,$$

$$A|_{t=0} = \cos x\,, \quad B|_{t=0} = 0\,, \quad \left.\frac{\partial A}{\partial t}\right|_{t=0} = \left.\frac{\partial B}{\partial t}\right|_{t=0} = 0\,.$$

79. Wieviel Lösungen besitzt die Randwertaufgabe

$$u_{xx} + \lambda u = \sin x\,, \quad u(0) = u(\pi) = 0\ ?$$

80. Lösen Sie die Gleichung

$$\int\limits_0^1 (x+y)^2\, u(x)\, dx = \lambda\, u(y) + 1\,.$$

81. Finden Sie die Greensche Funktion des Operators $d^2/dx^2 - 1$ und lösen Sie die Gleichung

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-y|}\, u(y)\, dy = e^{-x^2}\,.$$

82. Bei welchen Werten der Geschwindigkeit c hat die Gleichung $u_t = u - u^2 + u_{xx}$ Lösungen in Form einer laufenden Welle $u = \varphi(x - ct)$, $\varphi(-\infty) = 1$, $\varphi(\infty) = 0$, $0 \leqslant u \leqslant 1$?

83. Man finde die Lösungen der Gleichung $u_t = u_{xxx} + uu_x$, die die Form einer laufenden Welle $u = \varphi(x - ct)$, $\varphi(\pm\infty) = 0$ haben.

84. Man finde die Anzahl der positiven bzw. negativen Quadrate in der Normalform der quadratischen Form $\sum\limits_{i<j} (x_i - x_j)^2$ von n Variablen. Und für die Form $\sum\limits_{i<j} x_i x_j$?

85. Man finde die Längen der Hauptachsen des Ellipsoids

$$\sum_{i \leqslant j} x_i x_j = 1\,.$$

86. Man konstruiere eine Gerade durch das Zentrum eines Würfels (Tetraeders, Ikosaeders) so, daß die Summe der Quadrate der Abstände zu den Ecken a) minimal, b) maximal wird.

87. Man finde die Ableitungen der Längen der Halbachsen des Ellipsoids

$$x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx = 1 + \varepsilon xy$$

nach ε bei $\varepsilon = 0$.

88. Welche Figuren können bei dem Schneiden eines unendlichdimensionalen Würfels $|x_k| \leqslant 1$, $k = 1, 2, \ldots$ mit einer zweidimensionalen Ebene entstehen?

89. Berechnen Sie die Summe der Vektorprodukte $[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y]$.

90. Man berechne die Summe der Kommutatoren der Matrizen $[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]]$, wo $[A, B] = AB - BA$ ist.

91. Man finde die Jordansche Normalform des Operators $e^{d/dt}$ im Raum der Quasipolynome $\{e^{\lambda t} p(t)\}$, wobei die Ordnung der Polynome p kleiner als fünf ist; des Operators $\mathrm{ad}_A \colon B \mapsto [A, B]$ im Raum der $(n \times n)$-Matrizen B, wobei A eine Diagonalmatrix ist.

92. Man finde die Ordnungen der Untergruppen der Gruppe der Rotationen eines Würfels und ihre Normalteiler.

93. Man zerlege den Raum der Funktionen, die auf den Ecken eines Würfels definiert sind, in invariante Unterräume die bezüglich der Darstellungen a) der Gruppe seiner Symmetrien, b) der Gruppe seiner Drehungen irreduzibel sind.

94. Man zerlege den fünfdimensionalen reellen linearen Raum in irreduzible invariante Unterräume der Gruppe, die durch die zyklischen Vertauschungen der Basisvektoren erzeugt wird.

95. Man zerlege den Raum der homogenen Polynome fünfter Ordnung in (x, y, z) in irreduzible Unterräume, die bezüglich der Gruppe der Rotationen $SO(3)$ invariant sind.

96. Jeder der 3600 Kunden einer Telefonstation ruft sie im Mittel einmal pro Stunde an. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß in einer gegebenen Sekunde fünf oder mehr Anrufe erfolgen? Man schätze den mittleren Zeitabstand zwischen solchen Sekunden $(i, i + 1)$ ab.

97. Ein Teilchen, welches eine stochastische Bewegung auf den ganzen Zahlen der Halbachse $x \geqslant 0$ ausführt, bewegt sich mit der Wahrscheinlichkeit a bzw. b um einen Schritt nach rechts bzw. links und bewegt sich in allen anderen Fällen nicht (bei $x = 0$ bleibt das Teilchen anstelle der Linksverschiebung an seinem Platz). Man bestimme die asymptotische Wahrscheinlichkeitsverteilung sowie den mathematischen Erwartungswert von x und x^2, die sich für große Zeiten einstellen, wenn sich das Teilchen am Anfang im Punkt 0 befand.

98. Jeder der Teilnehmer des Spiels "Ochko",[2] die im Kreis stehen, zeigt einige Finger seiner rechten Hand. Für die Bestimmung des Gewinners wird die summarische Anzahl der gezeigten Finger ausgehend vom Spielführenden im Kreis abgezählt. Bei welcher Anzahl N von Teilnehmern wird die Wahrscheinlichkeit des Gewinns für mindestens einen aus $N/10$ passend ausgewählten Teilnehmern größer als 0.9? Wie verhält sich die Gewinnwahrscheinlichkeit für den Spielführenden bei $N \to \infty$?

99. Einer der Spieler verbirgt eine 10- oder 20-Kopekenmünze und der andere rät ihren Wert. Hat er richtig geraten, erhält er die Münze, im anderen Falle bezahlt er 15 Kopeken. Ist dies ein ehrliches Spiel? Was sind die optimalen gemischten Strategien beider Teilnehmer?

100. Man finde den mathematischen Erwartungswert der Fläche der Projektion eines Würfels mit Kantenlänge 1 auf eine Ebene bei isotrop verteilter zufälliger Projektionsrichtung.

[2] Name des Spiels, nicht übersetzbar