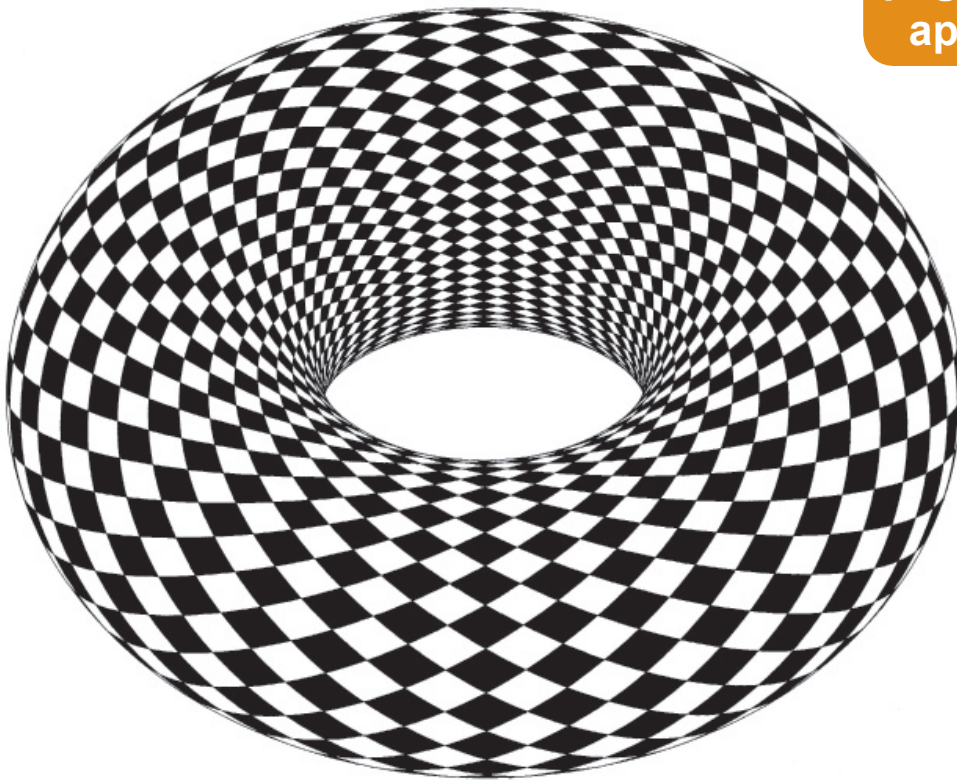


# Quadrature

Magazine de mathématiques pures et épicées

*La mathématique ouvre plus d'une fenêtre sur plus d'un monde*



Une sélection de 24 pages pour découvrir et apprécier Quadrature

Appolonios  
premier géomètre  
des singularités

Voulez-vous jouer  
avec moi ?

De drôles de dés !

Rectangles noirs dans  
une image

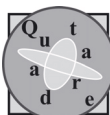
Textes en questions :  
Jean-Robert Argand

Envers et contre-exemples :  
Interversion de l'ordre  
d'intégration

## n° 92 bis

Magazine trimestriel  
Avril-mai-juin 2014  
ISSN 1142-2785

Bulletin  
d'abonnement  
page 24



## Quadrature

Numéro 92 bis

Sélection 24 pages

### Rédacteur en chef

Jean-Paul Truc

### Comité de rédaction

Laurent Bartholdi,  
Olivier Bordellès,  
Pierre Bornsztein,  
Thierry de la Rue,  
Bertrand Hauchecorne,  
David Hézard,  
Marie Hézard,  
Françoise Truc

### Fondateur et honoraires

Jean-Pierre Boudine,  
Jean Moreau de Saint-Martin,  
Didier Nordon,  
François Rideau,  
Roger Mansuy,  
Lazare-Georges Vidiani

### Revue publiée avec le concours du Centre national du Livre

#### Publicité : Jérôme Texier

Tél. : 01 43 29 31 01

jerome.texier@edpsciences.org

### Directeur de la publication

René-Louis Martin

Quadrature

12, rue Raymond-Poincaré

F-55800 Revigny-sur-Ornain

Tél. : 03 29 70 04 91

Fax : 03 29 70 89 63

Courriel : contact@quadrature.info

CEDIM, sarl au capital de 68 201,45 €

55800 Revigny-sur-Ornain

ISSN : 1142-2785

ISBN : 978-2-7598-0528-0

CPPAP : 0716 K 82650

Imprimé en France : Bialec, Nancy

Mise en page : Société e-Press  
Casablanca, Maroc

Dépôt légal : Avril 2014

© QUADRATURE 2014

### Illustration de couverture :

Tore et cercles de Villarceau  
par Boris Asanchev.

# Sommaire

|  |    |
|--|----|
| <b>Textes en questions</b> .....                           | 3  |
| <i>Par Norbert VERDIER et Christian GÉRINI</i>             |    |
| <b>Apollonios, premier géomètre des singularités</b> ..... | 6  |
| <i>Par Alain JOETS</i>                                     |    |
| <b>Voulez-vous jouer avec moi ?</b> .....                  | 11 |
| <i>Par Roger MANSUY</i>                                    |    |
| <b>De drôles de dés !</b> .....                            | 14 |
| <i>Par Max HOCHART</i>                                     |    |
| <b>Rectangles noirs dans une image</b> .....               | 17 |
| <i>Par Jacques-Henri JOURDAN</i>                           |    |
| <b>Envers et contre-exemples</b> .....                     | 20 |
| <i>Par Bertrand Hauchecorne</i>                            |    |
| <b>Forum</b> .....   | 22 |
| <b>Bulletin d'abonnement</b> .....                         | 24 |

## “ Éditorial *Par Jean-Paul Truc*

Chers futurs lecteurs de *Quadrature*, voici une édition spéciale électronique, conçue pour vous faire découvrir l'esprit et les contenus de notre journal, qui fait maintenant partie du paysage des mathématiques francophones depuis plus de vingt ans. Si *Quadrature* s'est maintenu dans ce milieu exigeant, c'est avant tout grâce à ses rubriques régulières, que nos abonnés retrouvent dans chaque nouveau numéro avec le même plaisir : *Envers et contre-exemples*, tenue par Bertrand Hauchecorne, propose un survol complet, historique et mathématique d'un sujet donné. Ici, ce sont les intégrales doubles, et plus spécialement le problème d'intervention de l'ordre d'intégration, dont vous pouvez suivre l'évolution de Newton à Fubini. *Textes en Questions*, la rubrique de Christian Gérini et Norbert Verdier, est orientée vers l'histoire des mathématiques à travers les textes anciens. Cette rubrique interactive propose à chaque numéro une nouvelle question à nos lecteurs, et publie les réponses de la question précédente. *Le Coin des problèmes*, de Pierre Bornsztein, propose également régulièrement des problèmes difficiles, souvent issus des Olympiades internationales. Mais *Quadrature*, c'est aussi des articles : certains reprennent des points classiques à la lumière de techniques modernes, comme ici les singularités, plis et fronces qui apparaissent déjà dans l'œuvre du géomètre grec Apollonios, d'autres abordent la théorie des jeux, de hasard ou de stratégie. D'autres encore exposent des résultats récents ou de nouvelles démonstrations. Toutes les branches des mathématiques, comme les probabilités, mais aussi l'algèbre, l'analyse et la géométrie sont ainsi présentes dans la revue. Notez également que l'informatique est également présente dans le journal, avec des articles d'algorithmiques. Enfin, le *Forum* présente les dernières actualités mathématiques. J'espère que cette sélection vous donnera envie de faire un bout de chemin avec nous et de devenir un lecteur régulier du journal.

.....  
**Contact rédaction** contact@quadrature.info

**Soumission** : Les articles peuvent être envoyés à contact@quadrature.info ou adressés en deux exemplaires à :

*Quadrature*. Jean-Paul Truc. École des Pupilles de l'Air  
Montbonnot-Saint-Martin, BP 33, 38332 Saint-Ismier.

Après acceptation. L'auteur devra fournir les fichiers électroniques de son article, au format  $\text{\LaTeX}$  de préférence.



# Textes en questions

## Les textes empruntés à l'histoire des mathématiques font notre actualité.

Par Norbert VERDIER et Christian GÉRINI

Cette rubrique de *Quadrature* propose d'offrir aux lecteurs une approche des problèmes de mathématiques par les textes originaux. Chaque numéro comporte une « Question mathématique » (l'énoncé commenté d'un problème tel qu'il fut posé par le passé) et une « Question historique » (détail d'un des aspects ou champs disciplinaires impliqués dans le problème posé). Les lecteurs sont invités à répondre à ces questions et les meilleures suggestions seront incorporées à celles des auteurs dans le numéro suivant.

Les équations différentielles dites « de Mathieu » sont de la forme :

$$\frac{d^2 P}{d\alpha^2} + (R - 2h^2 \cos(2\alpha))P = 0.$$

**Question mathématique 5 :** Comment résoudre une telle équation et dans quel(s) domaine(s) les rencontre-t-on ?

**Question historique 5 :** Qui était Mathieu et comment « ses » équations se sont propagées et sont passées à la postérité ?

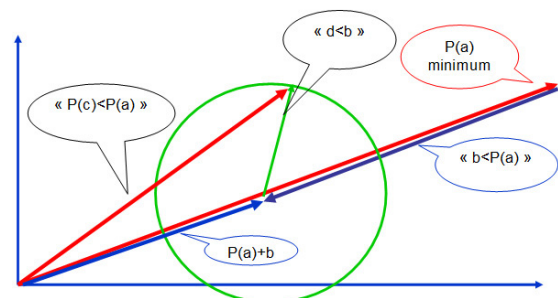
### Réponse à la question mathématique 4 (*Quadrature* n° 76) : Argand, la représentation vectorielle des imaginaires et une démonstration du théorème fondamental de l'algèbre

Argand part d'abord du principe que si  $P(z)$  est un polynôme à coefficients complexes, il existe  $a$  tel que  $P(a)$  réalise le « minimum » de  $P(z)$  sur  $C$ . Si  $P(a)$  est non nul, Argand construit alors vectoriellement et algébriquement un nombre complexe  $c$  pour que  $P(c)$  soit « inférieur » à  $P(a)$ , avec  $P(c) = P(a) + b + d$ , d'où la contradiction avec l'hypothèse «  $P(a)$  est non nul » et la conclusion sur le théorème ainsi démontré.

On voit immédiatement quelle est la première lacune : il pose *a priori* l'existence de  $a$ . Il lui aurait fallu démontrer celle-ci au moyen de la continuité du polynôme  $P$  sur une boule fermée pour démontrer que :

$$(\forall P \in C[X]) (\exists z_0 \in C) / P(z_0) = \text{Inf} \{P(z), z \in C\}.$$

Le but pour lui est de construire  $b$  et  $d$  pour que  $P(c)$  soit « inférieur » à  $P(a)$ . Le dessin suivant résume bien son raisonnement :



Il admet en fait le résultat suivant (qu'il ne peut pas connaître à l'époque) :

$$(\forall P \in C[X]), P \text{ non constant et de degré } n > 1, \\ (\exists s \in \{1, \dots, n\}) / P(z_0 + z) = P(z_0) + b_s z^s + z^{s+1} Q(z)$$

avec :

$$b_s \neq 0 \text{ si } z \neq 0 \text{ et } Q \in C[X] \text{ et } Q(z) = 0 \text{ si } s = n.$$

Mises à part ces lacunes, sa démonstration est rapide et élégante puisqu'elle se traduit par une écriture vectorielle qui la rend visuellement accessible (en particulier dans un but pédagogique). Elle a malheureusement été oubliée dans la longue histoire de la démonstration du théorème fondamental de l'algèbre.

## Réponse à la question historique 4 (*Quadrature n° 76*) : Les nombres imaginaires : mathématiques et/ou philosophie ?

Dès le XVI<sup>e</sup> siècle, et grâce aux Bombelli, Cardan et autres mathématiciens italiens, l'esprit humain, au prix de véritables « tortures morales » (l'expression est de Cardan), était capable de raisonner sur des objets non définis ( $\sqrt{-1}$ ,  $\sqrt{-121}$ , etc.), puisque n'existant pas dans les structures et les ensembles de nombres connus à l'époque : c'était là, bien évidemment, une entorse de taille aux règles de la logique classique, héritée d'Aristote et d'Euclide, d'autant plus que l'on y appliquait à des concepts purement abstraits des règles de calcul censées n'être valables que sur les seuls nombres qui étaient le reflet de la réalité, à savoir les nombres réels positifs.

Outre cette capacité d'abstraction, il nous faut insister sur la « capacité d'intuition » qui permettait à de tels esprits de généraliser à ces entités abstraites les règles de calcul jusqu'alors définies ; ils procédaient ainsi par une sorte d'induction et les résultats conformes qu'ils obtenaient étaient pour eux la justification *a posteriori* de la validité de leurs choix : dans une équation, par exemple, l'obtention à la fin des calculs de la racine réelle « correcte » justifiait l'emploi généralisé de la formule du binôme et des règles de calcul qu'elle sous-entend aux expressions contenant « autre chose » que des nombres réels. C'est ce qui permit pendant près de trois siècles aux mathématiciens de travailler à bon escient sur une extension de l'ensemble des nombres réels sans que soit pourtant établie la « connexion naturelle » qui fera passer ces nombres imaginaires du statut d'entités symboliques et formelles à celui de « quantités » intrinsèquement significatives et concrètement agissantes, puisque permettant d'élargir le champ de la connaissance du réel. Les mathématiques ne sont pas loin à ce stade de la méthode expérimentale aujourd'hui réservée aux sciences du même nom, puisque c'est par l'expérience qu'on justifie les choix et postulats, énoncés ou plus souvent sous-entendus, qui ont mené aux bons résultats.

On ne peut s'empêcher ici de faire la comparaison entre cette utilisation vite généralisée des nombres imaginaires et les difficultés que posèrent les seuls nombres négatifs. Il s'agit en fait, au plan intellectuel et philosophique, de la même question de la représentation du nombre par la grandeur, c'est-à-dire, au sens euclidien du terme, la grandeur constructible à la règle et au compas : bref, du tout philosophique dogme du réalisme géométrique. Descartes l'exprima très bien lorsqu'il introduisit le terme d'« imaginaire » : « ...tant les vraies racines que les fausses ne sont pas toujours réelles, mais quelquefois seulement imaginaires, c'est-à-dire qu'on peut toujours en imaginer autant que j'ai dit en chaque équation, mais qu'il n'y a quelque fois aucune quantité qui corresponde à celle qu'on imagine ». En fait, les nombres imaginaires, comme les nombres négatifs, furent d'abord utilisés pour « combler des vides » dans les calculs, c'est-à-dire pour leur seul aspect pratique, et cela jusqu'à la fin du XVIII<sup>e</sup> siècle où se posa le problème de leur « possibilité ». C'est ce qu'exprime ici Descartes, reprenant et

complétant en cela les affirmations de Peter Rothe en 1608 et d'Albert Girard en 1629, qui avaient avancé l'idée que toute équation algébrique de degré  $n$  possédait  $n$  racines, quitte à en « inventer » des imaginaires si les solutions réelles ne suffisaient pas. « *Toutes les équations d'algèbre reçoivent autant de solutions que la dénomination de la plus haute quantité le démontre (...). On pourrait dire : à quoi servent ces solutions qui sont impossibles, je réponds pour trois choses, pour la certitude de la règle générale, et qu'il n'y a point d'autres solutions, et pour son utilité* » écrit Albert Girard dans son *Invention nouvelle en algèbre*.

La difficulté d'accepter les imaginaires est d'autant plus forte que les transformations conceptuelles nécessaires à leur intégration au champ opératoire sont radicales. L'impossibilité de leur trouver une référence dans la nature accentue la difficulté, au point que Leibniz lui-même, esprit pourtant novateur et téméraire s'il en est, les range dans les fictions de l'esprit :

« *A vrai dire la Nature, mère des diversités éternelles, ou plutôt l'esprit Divin, sont trop jaloux de leur merveilleuse variété pour permettre qu'un seul et même modèle puisse dépendre toutes choses. C'est pourquoi ils ont inventé cet expédient élégant et admirable, ce miracle de l'Analyse, prodige du monde des idées, objet presque amphibie entre l'Être et le non-Être, que nous appelons racine imaginaire.*

*Ces expressions ont ceci d'admirable que dans le calcul elles n'enveloppent rien d'absurde et de contradictoire, et que cependant on ne peut en donner d'exemple dans la nature, c'est-à-dire dans les choses concrètes.* »

Ces textes de Leibniz méritent qu'on s'y arrête pour plusieurs raisons.

La première concerne l'intervention divine, y compris dans le champ des idées et particulièrement des concepts mathématiques.

La seconde concerne la référence à la philosophie platonicienne et aristotélicienne, présente dans l'expression *monde des idées* : les écrits scientifiques et les réflexions philosophiques étaient toujours abondamment imprégnées de la philosophie classique.

La troisième concerne la prise en compte par Leibniz, mais avant lui par les « inventeurs » des imaginaires, de la raison suffisante de la permanence (*elles n'enveloppent rien d'absurde*) des opérations et de certaines propriétés lors du passage des réels aux imaginaires. Ce principe de permanence, plus tard parfaitement énoncé par les représentants de l'école algébriste anglaise (et en particulier par Peacock en 1832), s'avère ici comme ailleurs très fécond.

La quatrième concerne le terme même d'*expressions*. Il était difficile de ranger les imaginaires dans les catégories issues de la philosophie classique : ni nombres, ni grandeurs, ils ne pouvaient être qu'*expressions*, le terme étant souvent affublé des qualificatifs d'*impossibles* ou *symboliques*. Le malaise perdura jusqu'au XIX<sup>e</sup> siècle. Il n'est qu'à lire les articles *Nombre*, *Grandeur*, *Quantité* de l'Encyclopédie de D'Alembert. Ce dernier écrit par exemple : « *Il faut à la quantité un sujet dans lequel elle réside, et hors duquel elle n'est qu'une pure abstraction* ». Les imaginaires ne mesurent aucune quantité : ils

ne sont pas des nombres. Leur seule réalité est nominale et contingente : comme les infinitésimaux de Newton et de Leibniz lui-même, ils sont voués à disparaître, à s'évanouir à la fin des calculs pour céder la place aux vrais nombres, les nombres réels.

En fait, les nombres imaginaires sont, dans un premier temps et pour longtemps, légitimés par leur utilité et par l'intuition du théorème fondamental de l'algèbre sur le nombre de racines d'une équation, théorème qui ne sera à peu près correctement démontré que par Gauss à la fin du XVIII<sup>e</sup> siècle. Entre les deux périodes, il sera fait un usage parfois immodéré des nombres imaginaires, certains mettant sous ce vocable tout ce qui n'existait pas (par exemple un arc de sinus supérieur à 1) ; mais, avec l'habitude de calculer formellement avec les nombres de la seule forme  $a + b\sqrt{-1}$ , on finit par se convaincre qu'il n'existait pas d'autres « imaginaires » que ceux-ci. C'est l'idée que défendait Euler : parvenant à décomposer en produits de facteurs réels du second degré une multitude de polynômes de degré supérieur, il en était arrivé à la « conclusion » que les solutions des équations polynomiales à coefficients réels étaient toutes de cette forme. Il appela théorème cette conclusion, bien qu'il n'en eût pas établi la démonstration dans le cadre général.

Dans son *Introduction à l'analyse infinitésimale*, il exprime clairement ces idées qui s'imposèrent sur toute la durée du XVIII<sup>e</sup> siècle.

Mais enfin, l'essentiel était apporté aux algébristes de l'époque ; inutile d'aller chercher d'autres solutions que ces fameux  $a + b\sqrt{-1}$  dans les équations algébriques. Le problème était à présent ailleurs : quelle légitimité concrète avaient ces nombres ?

Car là encore dans les esprits, il était « *indispensable de rendre sensible un concept abstrait, c'est-à-dire de montrer dans l'intuition un objet qui lui corresponde, parce que sans cela le concept n'aurait, comme on dit, aucun sens, c'est-à-dire aucune signification* » pour reprendre les termes de Kant dans la *Critique de la raison pure* (1772). C'est là que les *Annales de Gergonne* vont apporter leur contribution, s'inscrivant, comme pour les nombres négatifs, dans un courant encore très intuitionniste : il fallait ramener à l'étage sensible les nombres complexes, après que le concept même en eût été justifié au niveau formel. Et voici donc Argand, sa représentation géométrique des imaginaires et un débat en apparence clos : en apparence seulement puisque nous avons bien compris depuis lors que la représentation des imaginaires n'est que pure convention : on représente de la même manière tout vecteur d'un espace de dimension 2.

Enfin, une dernière précision : ce travail avait déjà été effectué dès 1797 par le Norvégien Caspar Wessel (1745–1818), mais, faute de diffusion par l'auteur comme par l'Académie royale du Danemark qui en avait pourtant reconnu l'originalité, il resta inconnu en Europe jusqu'à la fin du XIX<sup>e</sup> siècle : s'il faut lui rendre hommage, il nous faut aussi reconnaître que la diffusion de tels concepts en la matière était quasiment nulle avant la parution des *Annales de Gergonne* et des articles réservés à la représentation des nombres « imaginaires » qui s'y trouvent. Et que ces articles mirent provisoirement fin aux très philosophiques « tortures morales » que posait l'usage de ces nombres venus d'un « autre monde ».

## Bibliographie & Sitographie

Sur Argand et la géométrie des imaginaires, nous avons déjà donné une bibliographie/sitographie dans le numéro précédent ; nous la complétons simplement par :

- [1] V. Brun, « Caspar Wessel et l'introduction géométrique des nombres complexes », in *Revue d'Histoire des Sciences*, tome XII, janvier–mars 1959, pp. 19–24.
- [2] Collectif (IREM), *Images, imaginaires, imagination, une perspective historique pour l'histoire des nombres complexes*, Paris, Ellipses, 1998.

### Dans le prochain numéro :

Nous parlerons de la somme des angles d'un triangle (égale à deux droits), du rapport entre cette question et le cinquième postulat d'Euclide, et de la démonstration de Legendre dans ses *Eléments de géométrie*, démonstration critiquée par J.-P.-G. Stein dans les *Annales de Gergonne*.

Après le « scoop » du portrait de Bioche, nous reviendrons sur les règles de Bioche car, grâce à nos lecteurs, il y a du nouveau sur cette question.

### Contact :

Pour vos réponses, solutions et remarques, vous pouvez joindre les deux rédacteurs de la rubrique « Textes en questions » :

norbert.verdier@u-psud.fr & gerini@univ-tln.fr

# Apollonios, premier géomètre des singularités

par Alain JOETS\*

## I Le livre V des Coniques d'Apollonios

Le livre V des Coniques d'Apollonios (ou Apollonius) de Perge (262–180 av. J.-C.) est une œuvre dont le thème étonne par sa modernité. L'illustre géomètre y étudie le problème des segments de droites de longueur minimale ou maximale entre un point donné  $P$  du plan et une conique ( $C$ ). En langage moderne, il s'agit là d'un problème d'extrema. Apollonios le résout complètement en utilisant, avec brio, les outils de la géométrie élémentaire. En particulier, il détermine, pour chaque type de conique, les conditions pour lesquelles il existe ou non des solutions, et, dans le cas où elles existent, leur nombre.

Au milieu du XVII<sup>e</sup> siècle, C. Huygens créait, pour son horloge oscillante, la théorie des enveloppes des normales à une courbe. On s'aperçut alors que le contenu du livre V pouvait s'interpréter dans ce cadre théorique, les extrema correspondant aux normales et le changement du nombre de solutions correspondant à leur enveloppe. Aussi lit-on souvent que le cinquième livre des Coniques traite des normales aux coniques et détermine leur enveloppe. De nos jours, la théorie des enveloppes fait partie d'une théorie plus vaste, la théorie des singularités d'applications différentiables. Un point singulier est un point où le rang de l'application considérée n'est pas maximal : il y a une sorte d'écrasement local [1]. Selon la nature du problème, une singularité peut aussi être appelée point caustique, bifurcation, ou encore valeur critique.

Il faut reconnaître qu'à proprement parler Apollonios ne parle jamais de cette courbe singulière, dans aucun des 77 théorèmes qui constituent le livre. Est-ce à dire qu'Apollonios a manqué la dernière étape de son travail, la mise en évidence de la courbe enveloppe, autour de laquelle s'ordonnent

logiquement tous ses résultats ? Trop occupé par sa longue liste de cas, il aurait été incapable de comprendre la nature même de son problème et le livre V appartiendrait encore à la préhistoire de la théorie des singularités, en tant que premier essai inachevé. Afin de juger l'apport du livre V, il nous faut entrer dans le texte et lire les démonstrations. C'est ce que nous avons entrepris sur la traduction française de P. Ver Eecke [2].

Nous commencerons par rappeler les termes dans lesquels Apollonios exprime son problème. Puis nous traiterons le cas de la parabole avec les moyens actuels du calcul différentiel. Nous montrerons que le lieu où change le nombre de solutions correspond à la notion de singularité. Il se présente sous deux types de singularités : le pli  $\Pi$  (sous forme de courbe) et la fronce  $\Phi$  (sous forme de point de rebroussement). Puis nous montrerons que la construction géométrique de la proposition 51 du livre V donne exactement ces singularités. Enfin nous essaierons de reconstruire le raisonnement probable du géomètre.

## II Le problème d'Apollonios

Le problème d'Apollonios est le suivant. On se donne une conique ( $C$ ) du plan, parabole, ellipse ou hyperbole. Alors, étant donné un point  $P$ , on veut déterminer, parmi les segments de droites joignant  $P$  à ( $C$ ), ceux de longueur minimale ou maximale.

En fait, le point de vue d'Apollonios est un peu différent. Tout d'abord, il ne considère presque jamais une conique complète, mais le plus souvent une demi-conique ( $D$ ) limitée par un sommet (ou deux). La raison est probablement de simplifier le problème en abaissant d'une unité le nombre des solutions. Ensuite, Apollonios fait jouer un rôle particulier aux solutions pour lesquelles le point  $P$  est situé sur l'axe (ou l'un des axes pour l'ellipse). Ce sont ces solutions particulières qu'il appelle minimales ou maximales. Pour

\* joets@lps.u-psud.fr

désigner le cas général où  $P$  est hors de l'axe, il se sert d'une périphrase. Il n'en reste pas moins que c'est bien le problème général qu'il résout.

### III Le cas de la parabole

Du point de vue des singularités, les trois coniques fournissent exactement les mêmes types de singularités, à savoir la *pli* et la *fronce*. On peut donc se limiter au cas le plus simple, celui de la parabole.

Les coniques sont, par définition, les sections planes d'un cône. Dans le cas de la parabole, le plan de section est parallèle à une génératrice du cône. Une parabole ( $P$ ) est caractérisée par son sommet  $S$ , son axe et une grandeur  $p$  qui mesure son ouverture. La grandeur  $p$  est appelée demi-paramètre ou encore demi-côté droit.

Dans le plan, rapporté à un repère orthonormé  $(O; x, y)$ , plaçons l'origine au sommet  $S$ , et l'axe de ( $P$ ) suivant les  $x$  positifs (voir la figure 1). La proposition 11 du livre I des Coniques nous dit que, pour un point de la parabole, le carré de  $y$  équivaut au « rectangle délimité » par  $x$  et le paramètre. En d'autres termes, l'équation de ( $P$ ) s'écrit  $y^2 = 2px$ .

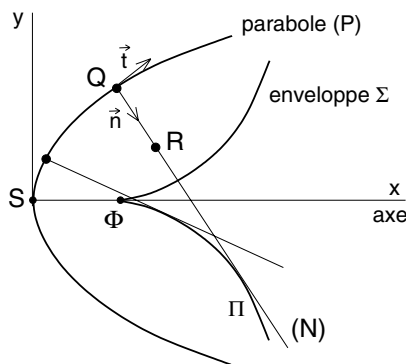


Figure 1. L'ensemble des normales ( $N$ ) à la parabole ( $P$ ) admet pour enveloppe une parabole semi-cubique  $\Sigma$  ayant  $\Phi$  pour point de rebroussement.

#### III.1 Traitement moderne : singularités, plis et fronce

Le point courant  $Q$  de la parabole est paramétré par son ordonnée  $y$  :  $Q = (y^2/2p, y)$ . Introduisons la fonction distance  $d(y; X, Y)$  entre  $Q$  et un point fixe  $P = (X, Y)$  du plan :

$$d(y; X, Y) = \sqrt{(X - y^2/2p)^2 + (Y - y)^2}.$$

La condition d'extrémalité de  $d$ , par rapport à  $Q$ , est  $\partial d / \partial y = 0$ . Il est facile de voir qu'on a alors  $\overrightarrow{QP} \cdot \overrightarrow{\partial Q / \partial y} = 0$ , relation qui exprime que la droite extrémale est normale à la parabole. Analytiquement,

on obtient une équation algébrique du troisième degré en  $y$  :

$$y^3 + 2p^2(1 - X/p)y - 2p^2Y = 0. \quad (1)$$

On sait que l'équation du troisième degré  $y^3 + ay + b = 0$  admet 1 ou 3 solutions suivant que son discriminant  $D = 4a^3 + 27b^2$  est positif ou négatif. Le cas limite  $D = 0$  correspond à la courbe  $\Sigma$  d'équation  $(X - p)^3 = 27pY^2/8$ , courbe dite parabole semi-cubique (voir la figure 1). Quand  $P$  est à l'intérieur (resp. à l'extérieur) de cette courbe, on a trois solutions (resp. une solution). Quand  $P$  est sur la courbe, deux solutions sont en coïncidence, et au point de rebroussement  $\Phi = (p, 0)$ , trois solutions coïncident. La courbe  $\Sigma$  est donc composée d'une partie régulière  $\Pi$ , sous forme de deux arcs convexes, et d'un point de rebroussement  $\Phi$  auquel aboutissent les deux arcs :  $\Sigma = \Pi \cup \Phi$ .

Le raisonnement que nous venons de faire utilise les propriétés de l'équation algébrique (1). Nous donnons maintenant un traitement complètement général permettant de caractériser  $\Pi$  et  $\Phi$  de façon intrinsèque. Le point de départ est le fait que les extrémales, comme nous l'avons rappelé, sont exactement les normales à la parabole. Un vecteur tangent à la parabole en  $Q = (y^2/2p, y) \in (P)$  est  $\vec{t} = (y/p, 1)$ . Un vecteur normal à  $\vec{t}$  est  $\vec{n} = (1, -y/p)$  (voir la figure 1). Le point courant  $R = (X, Y)$  de la normale ( $N$ ) passant par  $Q$  est donné par  $R = Q + s\vec{n}$ , où  $s$  est une abscisse le long de ( $N$ ). Les normales ont donc pour équation :

$$\begin{aligned} X &= s + y^2/2p, \\ Y &= y - sy/p. \end{aligned}$$

Quand on suit le point courant  $R$  de ( $N$ ) à partir de ( $P$ ), on s'aperçoit que  $\Sigma$  est le lieu où se concentrent localement les normales. On peut aussi dire que tout point de  $\Sigma$  est l'intersection de deux normales infiniment proches, ou bien encore que  $\Sigma$  est l'enveloppe des normales. Définissons alors l'application  $f : (s, y) \mapsto (X, Y)$ . La concentration des normales s'exprime grâce à  $f$  en disant que son rang, c'est-à-dire le rang de sa dérivée  $f'$ , n'a pas la valeur maximale 2. Cette propriété caractérise, par définition, la notion de point singulier [1]. La dérivée  $f'$  est représentée par la matrice jacobienne

$$J = \begin{pmatrix} \partial X / \partial s & \partial X / \partial y \\ \partial Y / \partial s & \partial Y / \partial y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & y/p \\ -y/p & 1 - s/p \end{pmatrix}.$$

Dire que le rang de  $f'$  n'est pas égal à 2, c'est dire que la matrice  $J$  n'est pas inversible, ou encore que son déterminant est nul. L'ensemble de tous les points singuliers est appelé ensemble singulier. L'équation de l'ensemble singulier  $S \subset \{s, y\}$  est donc  $\det J = 0$ , c'est-à-dire ici :

$$s = p + y^2/p.$$

En reportant  $s$  dans l'expression de  $X$  et  $Y$ , on trouve  $\Sigma = f(S)$  sous forme d'une courbe paramétrée :

$$\begin{aligned} X &= p + 3y^2/2p, \\ Y &= -y^3/p^2. \end{aligned} \quad (2)$$

Éliminons le paramètre  $y$ . Nous retrouvons la parabole semi-cubique  $(X - p)^3 = 27pY^2/8$ .

Il nous reste à comprendre ce qui distingue  $\Pi$ , appelé pli, de  $\Phi$ , appelé fronce. La réponse est simple. Il suffit de considérer l'application  $g : (y) \mapsto (X, Y)$ , restriction de  $f$  à l'ensemble singulier  $S$ . Elle est définie par (2). Sa dérivée est donnée par la matrice

$$G = \begin{pmatrix} dX/dy \\ dY/dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3y/p \\ -3y^2/p^2 \end{pmatrix}.$$

Alors il est clair que  $g$  est de rang maximal 1 le long du pli et de rang 0 au point fronce. En d'autres termes, le pli est une singularité régulière et la fronce une singularité singulière. Les plis forment des courbes et les fronces sont des points isolés sur les courbes plis. Dans le plan, plis et fronces sont les seules singularités génériques, c'est-à-dire celles auxquelles on doit généralement s'attendre.

Notons en passant que l'équation du pli (rang de  $f = 1$ ) et celle de la fronce (rang de  $g = 0$ ) sont données intrinsèquement, indépendamment de tout système de coordonnées.

Le rapport avec l'analyse précédente est le suivant. En suivant le point courant  $R$  de la normale ( $N$ ) issue du point  $Q \in (P)$  (pas trop éloigné de  $S$ ) la fonction distance  $d$  présente d'abord un minimum unique. Quand  $R$  traverse  $\Sigma$  un minimum et un maximum apparaissent. Puis, au passage par le point de contact avec  $\Sigma$ , le minimum initial devient un maximum.

### III.2 La construction d'Apollonios

Apollonios, bien évidemment, ne connaissait ni les discriminants, ni les dérivées. Voyons d'abord son résultat principal sur le nombre de solutions.

C'est dans la proposition 51 qu'on trouve la condition déterminant le nombre de solutions. Elle s'exprime par une quantité  $K > 0$ , appelée droite de référence, à laquelle l'ordonnée  $Y$  de  $P$  doit être comparée. Apollonios n'explique pas d'où vient cette grandeur  $K$ . Il nous montre, dans une longue vérification, que pour  $|Y| > K$  il n'y a pas de solution (au sens d'Apollonios), puis que pour  $|Y| = K$  il y a une solution, enfin que pour  $|Y| < K$  il y a deux solutions.

La valeur de  $K$  n'est pas donnée dans l'énoncé, appelé protase, ni dans l'ecthèse, qui est une redite plus explicite de la protase, avec des symboles pour désigner les points. Elle est donnée au début de la démonstration.

Désignons par  $C = (X, Y)$  un point dont on suppose l'abscisse  $SZ$  plus grande que le demi-paramètre  $p$  (voir la figure 2). La construction d'Apollonios donne son ordonnée  $|Y| = ZC = K$  pour que le problème n'admette qu'une solution (au sens d'Apollonios). Plus précisément on définit le point  $H$ , situé entre  $S$  et  $Z$ , à une distance  $p$  de  $Z$ . Puis le point  $T$  est pris au premier tiers du segment  $SH$ . La perpendiculaire à l'axe est élevée à partir de  $T$ . Elle rencontre la parabole en  $Q$ . La grandeur  $K$  est alors donnée par :

$$\frac{K}{TQ} = \frac{TH}{HZ}.$$

Vérifions que l'on retrouve bien la courbe  $\Sigma$  calculée plus haut. Le point  $Q$  étant sur la parabole, on a  $TQ^2 = 2pST$ . Rappelons que le point fronce  $\Phi$  est tel que  $S\Phi = p$ . On a alors  $\Phi Z = SZ - p = SZ - HZ = SH = 3ST = 3TQ^2/2p$ . D'autre part  $K = TH \times TQ/HZ = 2ST \times TQ/p = TQ^3/p^2$ . Comme précédemment, on élimine  $TQ$  entre  $\Phi Z = X - p$  et l'ordonnée  $Y = -K$  et l'on retrouve la parabole semi-cubique  $(X - p)^3 = 27pY^2/8$ .

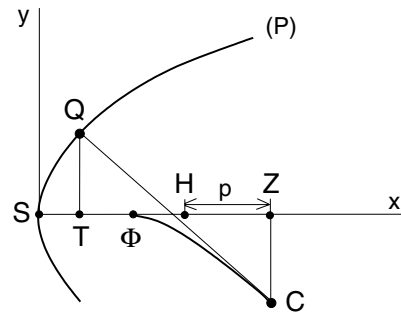


Figure 2. Construction d'Apollonios. On a  $HZ = p$ ,  $SH = 3ST$ . La droite de référence  $K$  est donnée par  $K/TQ = TH/HZ$ .

Une première conclusion est qu'Apollonios a effectivement défini la courbe  $\Sigma$ , ligne de séparation entre les points pour lesquels le problème admet deux solutions et ceux pour lesquels il n'en admet aucune. Le traitement apollonien est équivalent au traitement moderne. Seule la formulation diffère : géométrique chez Apollonios, analytique pour nous.

La question est maintenant de savoir comment Apollonios est arrivé à son résultat, ne disposant pas de méthodes infinitésimales. Le mieux est de le suivre en commençant par le problème restreint, c'est-à-dire le problème où le point  $P = (X, Y)$  est sur l'axe de la parabole ( $P$ ).

### III.3 Le problème restreint

Dans le problème restreint on a  $Y = 0$ , et l'équation (1) se factorise. Une première solution donne le segment minimal  $PQ$ , avec  $Q = (x, y) \in (P)$  tel que



$x = X - p > 0, y^2 = 2p(X - p)$ . Géométriquement, la solution  $PQ$  s'obtient simplement : à partir de  $P$ , on se déplace de  $p$  sur l'axe vers le sommet  $S$  ; à partir du point  $H$  obtenu, on élève la perpendiculaire à l'axe jusqu'au point  $Q$  de la parabole (voir la figure 3). La seconde solution est le segment de l'axe  $PS$  :  $x = 0, y = 0$ . Les deux solutions viennent en coïncidence pour  $X = p$ .

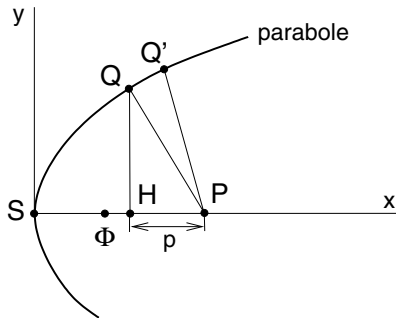


Figure 3. Problème restreint. Pour  $SP > SF = p$ , le segment de longueur minimale est  $PQ : PQ' > PQ$ . Pour  $SP < p$ , le segment minimal est  $PS$ .  $\Phi$  est le point fonce, unique singularité située sur l'axe de la parabole.

Apollonios traite séparément les trois cas : d'abord  $X = p$  (proposition 4), puis  $X < p$  (proposition 7), enfin  $X > p$  (proposition 8). À chaque fois, il donne la solution et montre sa minimalité, sans expliquer comment il a été amené à la solution. Il n'est cependant pas difficile d'entrevoir la raison. Raisonnons en langage algébrique. Imaginons que nous ne connaissions pas le point  $Q = (X - p, y) \in (P)$  correspondant à la solution minimale. Nous écrivons donc  $Q = (X - q, y)$ , où  $q$  est encore indéterminé. Prenons un point voisin  $Q'$  de la parabole :  $Q' = (X - q + \delta, y')$ . Nous devons comparer  $PQ$  et  $PQ'$ . Il est facile de voir qu'on a  $PQ'^2 - PQ^2 = \delta^2 + 2\delta(p - q)$ . On conclut qu'on a un minimum quand  $q = p$ . Il est probable qu'Apollonios ait suivi un raisonnement de ce genre, où nos expressions algébriques sont remplacées par des longueurs ou des rapports de longueurs. Il est d'ailleurs à noter que la proposition 8 donne justement l'excédent  $\delta^2$  des carrés des longueurs  $PQ$  et  $PQ'$ . On comprend donc comment ces manipulations ont pu conduire Apollonios à la solution du troisième cas. Comme cette solution n'a de sens que pour  $SP > p$ , on voit apparaître tout naturellement le point singulier  $\Phi = (p, 0)$  pour lequel apparaît l'autre type de solution : le segment  $SP$ .

### III.4 Le problème général

Apollonios n'attaque pas le problème général immédiatement. Il explore d'abord quelques cas simples où  $P$  est hors de l'axe de la parabole : cas où  $P$  est sur

un segment minimal, entre l'axe et la parabole (proposition 12), et cas où  $P$  est à l'extérieur de la parabole (proposition 34). Puis vient la proposition 51 traitant le cas général. En fait, Apollonios cherche ici les droites  $PQ$  qui, coupant l'axe de la parabole en un point  $L$ , définissent une solution  $LQ$  du problème restreint (voir la figure 4). La proposition 72 complètera le résultat en précisant que le segment  $PQ$  est bien une droite minimale ou maximale (quand il a un point de contact avec  $\Sigma$ ).

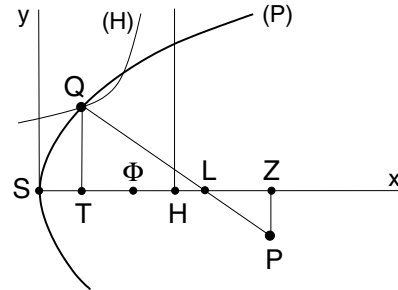


Figure 4. Problème général. On a  $HZ = p$ . La droite verticale passant par  $H$  et l'axe des  $x$  sont les asymptotes d'une hyperbole équilatère ( $H$ ) dont l'intersection avec la parabole ( $P$ ) donne les deux solutions dans le cas  $X = SZ > p, |Y| = ZP < K$ .

Tentons de comprendre l'origine de la droite de référence  $K$ . Appelons  $Z$  et  $T$  les pieds des perpendiculaires à l'axe, abaissées respectivement de  $P$  et de  $Q$ . On a donc

$$\frac{ZP}{TQ} = \frac{LZ}{TL}.$$

Exprimons maintenant que  $LQ$  est solution du problème restreint. Nous avons vu que cela entraîne que  $TL = p$ . Introduisons le point  $H$ , sur l'axe, du côté du sommet  $S$ , tel que  $HZ = p$ . On a donc  $LZ = SZ - ST - TL = SZ - p - ST = SH - ST = TH$ . On peut donc écrire

$$\frac{ZP}{TQ} = \frac{TH}{HZ}. \quad (3)$$

Pour avoir la droite de référence  $ZP = K$ , il ne nous manque que la relation  $SH = 3ST$ , exprimant la mise en coïncidence de deux solutions  $PQ$  (du problème général).

Le traitement analytique moderne est simple. Posons  $u = ST, \alpha = SH, \beta = ZP\sqrt{p/2}$ . Alors la relation (3) s'écrit  $\sqrt{u}(\alpha - u) = \beta$ . La fonction  $\sqrt{u}(\alpha - u)$  admet un maximum. On a deux solutions pour  $\beta$  petit. Quand  $\beta$  augmente, les deux solutions se rapprochent l'une de l'autre et viennent en coïncidence au point maximum. Le calcul différentiel nous permet de calculer le  $u$  correspondant au maximum :  $u = \alpha/3$ . Il donne bien la relation cherchée.

La fin de la démonstration de la proposition 51 laisse voir le raisonnement d'Apollonios. Écrivons

la relation (3) sous la forme  $TQ \times TH = HZ \times ZP$ . Fixons le membre de droite et relâchons la contrainte  $Q \in (P)$ . La relation précédente définit une hyperbole équilatère  $(H)$  ayant pour asymptotes l'axe des  $x$  et l'axe vertical passant par  $H$ . C'est ainsi qu'Apollonios définit les deux solutions quand elles existent, comme intersection de la parabole et d'une hyperbole. Maintenant, quand  $ZP$  augmente, l'hyperbole se déplace et, à un moment donné, elle va venir tangenter la parabole (voir la figure 5). Cette position correspond précisément à la coïncidence des deux solutions. Voyons la conséquence du contact de  $(P)$  avec  $(H)$ . Pour cela, faisons appel aux propriétés des tangentes aux coniques, analysées dans les livres précédents des Coniques. Soient  $U$  et  $V$  les points d'intersection de la tangente commune de  $(P)$  et  $(H)$  avec, respectivement, l'axe des  $x$ , et la perpendiculaire à l'axe passant par  $H$  (voir la figure 5). L'axe des  $x$  est à la fois axe de  $(P)$  et asymptote de  $(H)$ . La proposition 35 du livre I nous dit que  $US = ST$  (voir la figure 6a). D'autre part, la proposition 3 du livre II nous dit que  $UQ = QV$  (voir la figure 6b). Comme les deux triangles  $UQT$  et  $UVH$  sont semblables, on a  $UT = TH$ . On conclut que  $SH = 3ST$ , la relation cherchée. On voit que l'utilisation d'une condition de contact entre coniques permet de suppléer ici le calcul différentiel.

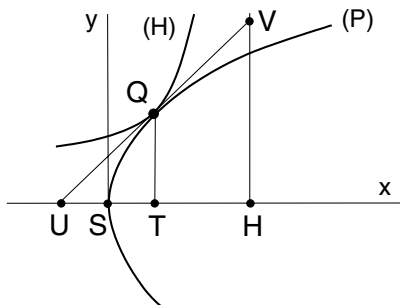


Figure 5. L'existence d'une solution unique signifie que la parabole  $(P)$  et l'hyperbole  $(H)$  ont un point de contact en  $Q$  et une tangente commune  $UV$  passant par  $Q$ .

#### IV Modernité du livre V

De ce coup d'œil rapide sur le cas de la parabole, il ressort tout d'abord que le livre V ne traite nullement des propriétés des normales en tant que telles. Le problème central est celui de la bifurcation d'extrema de

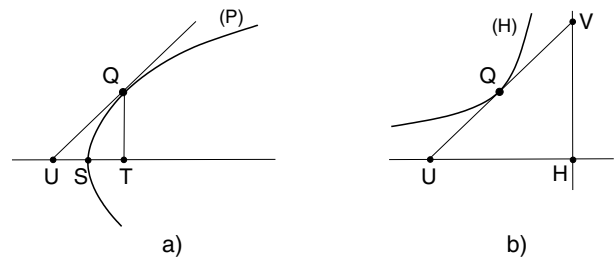


Figure 6. Propriétés des tangentes des coniques : a) l'intersection  $U$  de la tangente à la parabole  $(P)$ , en  $Q$ , est telle que  $US = ST$ , où  $S$  est le sommet de  $(P)$  et  $T$  le pied de la perpendiculaire à l'axe abaissée de  $Q$ ; b) les intersections  $U$  et  $V$  de la tangente à l'hyperbole  $(H)$ , en  $Q$ , avec les asymptotes de  $(H)$  sont telles que  $UQ = QV$ .

fonctions (ici la fonction distance) dépendant de deux paramètres : les coordonnées de  $P$ . Apollonios a clairement montré que les solutions bifurquent quand  $P$  traverse une courbe  $\Sigma$  composée d'une partie régulière  $\Pi$  et d'une singularité fronce  $\Phi$ . Dans la terminologie actuelle ces bifurcations s'appellent aussi singularités lagrangiennes.

Il se trouve que le livre V épuise déjà toutes les possibilités de singularités génériques dans le plan, à savoir les singularités plis et les singularités fronces. Il faudra attendre la seconde moitié du XIX<sup>e</sup> siècle pour que le cas des singularités dans l'espace soit abordé, et le dernier quart du XX<sup>e</sup> siècle pour disposer d'une théorie générale [1]. Dans cette longue histoire, Apollonios apparaît donc comme un père fondateur.

Le texte grec ne nous est pas parvenu. Nous ne connaissons le livre V que par sa transmission arabe. Les premières traductions en latin datent de la seconde moitié du XVII<sup>e</sup> siècle, au moment même où se créait le calcul différentiel, un calcul, comme on sait, particulièrement bien adapté au calcul d'extrema. Aussi le livre V n'a-t-il eu que peu d'influence malgré son extraordinaire modernité.

#### Références

- [1] V.I. Arnold, S.M. Gusein-Zade et A.N. Varchenko, *Singularities of Differentiable Maps*, Vol. I, Birkhäuser, Boston, 1985.
- [2] *Les Coniques d'Apollonios de Perge*, traduction P. Ver Eecke, réédition Blanchard, Paris, 1963.

# Voulez-vous jouer avec moi ?

par Roger MANSUY

J'ai quelques dés, des pièces de monnaie, et si, pour passer le temps, nous jouions un peu à titiller le hasard ? Commençons par fixer les règles : nous jouons seuls vous et moi, et, pour chaque partie, la mise de départ et le gain en cas de victoire seront identiques. Ainsi le jeu vous sera favorable si la probabilité de votre victoire est supérieure à  $1/2$ , défavorable si elle est inférieure à  $1/2$  et équitable si celle-ci est exactement égale à  $1/2$ . Remarquons que nous retrouvons ainsi la définition classique de jeu équitable si l'espérance de gain est nulle, respectivement favorable ou défavorable selon le signe de l'espérance de gain.

Vous hésitez encore ! Vous avez sûrement déjà lu les articles de C. Bouzitat et G. Pagès<sup>1</sup> sur la Française des jeux, et vous savez que tous les jeux à gratter proposés par cette société vous sont défavorables. Jetez un petit coup d'œil au livre de R. Isaac<sup>2</sup> et vous apprendrez, si vous ne le saviez déjà, qu'au casino vos chances ne sont guère plus élevées : au craps, votre probabilité de gain est environ 0,493, et en jouant la parité (ou la couleur) à la roulette américaine, elle est de 0,474. . . Bref, votre espérance de gain est négative, et les jeux vous sont défavorables.

Vous ne voulez toujours pas jouer ? Tant pis pour ma fortune personnelle (ou la vôtre. . .), examinons quand-même les jeux que je comptais vous proposer et déterminons, pour l'honneur de l'esprit humain, si ceux-ci sont équitables ou si j'essayais d'abuser de votre crédulité.

## I Jouons comme le chevalier de Méré

Le chevalier de Méré est un personnage important dans l'histoire des probabilités, et pourtant il n'entendait rien aux mathématiques. C'est plutôt un écrivain mondain qui profite des salons pour jouer de l'argent et faire parier autour de quelques lancers de dés. Un jeu courant à cette époque consiste à parier que l'on ne

fera aucun 6 en quatre lancers successifs d'un dé standard (c'est-à-dire à six faces et non pipé). Des calculs élémentaires nous montrent aisément que la probabilité de victoire est alors  $(5/6)^4 \simeq 0,482$ , et vous voyez que le jeu est défavorable. Les joueurs non plus n'ont pas été dupes, et on raconte que le chevalier de Méré a cherché des variantes à ce jeu. En particulier, il aurait proposé de parier sur le fait de n'obtenir aucun double-six en vingt-quatre lancers de deux dés standards. Ce jeu est l'un des sujets de la correspondance de 1654 entre le chevalier et Blaise Pascal<sup>3</sup>. On ne sait pas trop ce qui a motivé le chevalier à solliciter les lumières de Pascal : un retour de fortune, un doute sur le jeu, la réaction des joueurs. . . Et si je vous avais proposé ce jeu, auriez-vous accepté de parier ?

Nous avons déjà vu que le jeu initial (parier sur aucun 6 en quatre lancers) est défavorable. En rajoutant un dé à six faces et en multipliant le nombre de lancers par six, le chevalier pense conserver le caractère défavorable du jeu pour le parieur. Et pourtant, contre l'intuition, ce nouveau jeu est favorable au parieur ; en effet, en lançant deux dés il y a trente-six résultats possibles (en distinguant bien la combinaison (4,3) de la combinaison (3,4)) dont un seul fait perdre le parieur (le double-six). La probabilité de victoire du parieur est donc de  $(35/36)^{24} \simeq 0,509$ . Le jeu est effectivement favorable au parieur. On remarque (d'après le graphique de la figure 1) que si le chevalier de Méré avait choisi vingt-cinq lancers (ou plus), le jeu serait défavorable au parieur.

Pour bien comprendre l'intérêt de cet exemple, calculons le nombre moyen de 6 obtenus en quatre lancers d'un dé : cette variable aléatoire suit une loi binômiale de paramètres 4 et  $1/6$  donc son espérance est  $4 \times 1/6 = 2/3$ . De même, le nombre moyen de double-six obtenus en 24 lancers de deux dés est  $24 \times 1/36 = 2/3$ . En moyenne, on obtient le même nombre de 6 dans le premier jeu que de double-six dans le second jeu. Bien que ces deux variables aient la même espé-

1. Ces articles sont compilés dans le très intéressant volume : *En passant par hasard*, Vuibert, 1999.

2. *Une initiation aux probabilités*, Vuibert-Scopos, 2005.

3. C'est aussi dans cette correspondance que l'on trouve le problème des partis, qui sera à la base des probabilités conditionnelles ; voir par exemple « Pascal et les problèmes du chevalier de Méré », Y. Derriennic, *Gazette des mathématiciens*, Juillet 2003.

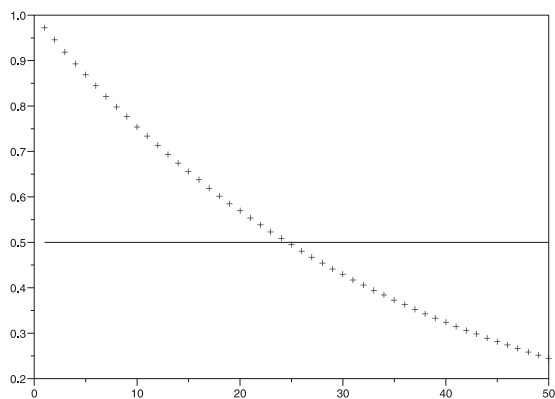


Figure 1. Évolution de la probabilité de n'obtenir aucun double-six en fonction du nombre de lancers de deux dés.

rance, nous avons déjà calculé qu'elles n'ont pas la même probabilité d'être supérieure à 1 (et donc d'apporter la victoire au parieur) : en effet, la probabilité que le nombre de 6 obtenus dans le premier jeu soit plus grand que 1 est 0,482 alors que la probabilité que le nombre de double-six dans le second jeu soit plus grand que 1 est 0,509.

## II Jouons avec une pièce biaisée (i.e. non symétrique)

La pièce de 1 euro grecque est très jolie : côté pile, c'est la même que n'importe quelle pièce communautaire, côté face on retrouve d'antiques drachmes avec la chouette d'Athènes. Si nous jouions à Pile ou Face avec cette pièce, je choisirais à coup sûr le côté Face et cette chouette car c'est mon porte-bonheur. Je vous imagine dubitatif, vous connaissez mal cette pièce et vous pensez que si je tiens tant à cette pièce et à ce côté particulièrement, c'est qu'elle est biaisée et que la chouette sortira plus souvent que le côté pile communautaire. Comment savoir si cette pièce est équilibrée ? Étudier le mode de fabrication, procéder à de complexes mesures physiques, estimer statistiquement le biais de la pièce en procédant à de nombreux lancers successifs... Pour nous épargner toute cette peine, je propose le jeu suivant : nous lançons deux fois cette pièce de 1 euro, si nous obtenons Face puis Pile, je gagne ; si le résultat est Pile puis Face, vous gagnez, sinon on relance deux fois la pièce, et ainsi de suite jusqu'à obtenir soit Pile-Face soit Face-Pile. Que pensez-vous de cette nouvelle proposition <sup>4</sup> ?

4. Ce jeu est originellement proposé par J. von Neumann : « Various techniques used in connection with random digits », *Appl. Math. Ser.* **12** (1951) 36–38. Une version plus évoluée qui répond à la question « quel type de biais peut-on obtenir à partir d'une pièce de biais inconnu ? » est donnée par E. Mossel et Y. Peres : *New coins from old: computing with unknown bias*. <http://front.math.ucdavis.edu/math.PR/034143>

Comme nous ne savons pas si cette pièce est équilibrée, notons  $p \in ]0, 1[$  la probabilité d'obtenir Face (c'est-à-dire la chouette). Alors, le résultat de deux lancers successifs suit la loi donnée par le tableau suivant :

| Résultat  | Probabilité |
|-----------|-------------|
| Face-Face | $p^2$       |
| Pile-Pile | $(1 - p)^2$ |
| Pile-Face | $p(1 - p)$  |
| Face-Pile | $p(1 - p)$  |

Nous voyons donc qu'à chaque paire de lancers, nous avons la même probabilité de gagner : le jeu est équitable et ceci est vrai quelle que soit la pièce, qu'elle soit ou non équilibrée...

Maintenant que nous savons que ce jeu est équilibré, il reste à déterminer que celui-ci se termine bien (et donc que la probabilité d'une partie infinie sans gagnant est nulle). Chaque paire de lancers délivre un vainqueur avec la probabilité  $2p(1 - p) > 0$ . D'après les résultats sur les suites d'épreuves de Bernoulli, la durée de ce jeu suivra une loi géométrique de paramètre  $2p(1 - p)$  et le nombre moyen de lancers à effectuer est  $\frac{1}{2p(1-p)}$  : par exemple, avec  $p = 2/3$ , cela nous donne un nombre moyen de 4,5 lancers ; notons que si  $p = 1/2$ , le jeu (selon cette règle) requiert en moyenne quatre lancers (ce qui est ridicule car un seul lancer d'une pièce équilibrée suffit pour obtenir un jeu équitable).

## III Jouons à la suite de W. Penney

Revenons maintenant à une pièce équilibrée (c'est-à-dire la probabilité d'obtenir F, Face, est identique à la probabilité d'obtenir P, Pile et vaut  $1/2$ ) et étudions une variante du jeu précédent. Procédons à une séquence ininterrompue de lancers successifs de cette pièce. En trois lancers, les résultats FPP et PPF ont la même probabilité  $1/8$ . Regardons notre série de lancers, si la séquence FPP sort avant la séquence PPF je gagne, si c'est l'ordre inverse, vous gagnez. Alors, pour un tel jeu, acceptez-vous de jouer avec moi ?

Ce jeu est tout à fait contre-intuitif ; en effet, même si les deux événements ont la même probabilité d'être obtenu en trois lancers ( $(1/2)^3 = 0,125$  pour chacun), il se trouve que la probabilité que FPP sorte avant PPF est de  $3/4$  contre  $1/4$  pour l'ordre inverse. Ce résultat surprenant est connu sous le nom de paradoxe de W. Penney<sup>5</sup>. Essayons d'expliquer celui-ci avec un minimum de calculs (et avec un modèle markovien).

5. W. Penney, « Problem 95 : Penney-ante », *J. Recreational Math.* **7** (1974) 321.

Pour cela, considérons les résultats des deux derniers lancers (nos explications commencent à partir du troisième lancer car personne ne peut gagner plus tôt dans la partie). Si le résultat de ces lancers est :

**Configuration 1 : PP**

- soit le résultat suivant est F et vous gagnez ;
- soit le résultat est P et on reste dans la configuration 1 puisque les deux derniers lancers ont donné Pile.

**Configuration 2 : FP**

- soit le résultat est F et on se retrouve dans la configuration 3 ;
- soit le résultat est P et je gagne.

**Configuration 3 : PF**

- soit le résultat est F et on se retrouve dans la configuration 4 ;
- soit le résultat est P et on se retrouve dans la configuration 2.

**Configuration 4 : FF**

- soit le résultat est F et on reste dans la configuration 4 ;
- soit le résultat est P et on se retrouve dans la configuration 2.

Ceci est résumé sur la figure 2 et on note que ce graphe comporte deux composantes connexes avec dans chacune l'issue victorieuse pour l'un de nous.

De plus, nous sommes dans votre composante connexe (*i.e.* celle où se trouve votre issue victorieuse) si, et seulement si, les deux premiers lancers donnent Pile, ce qui arrive avec la probabilité 1/4. Nous sommes dans l'autre composante connexe (*i.e.* celle dont je sors victorieux) avec la probabilité complémentaire, 3/4. Par conséquent, j'ai trois fois plus de chances de gagner que vous et nous serons fixés sur le nom du perdant au deuxième lancer au plus tard.

Il reste alors à vérifier que, dans chacun de ces cas de figure, il y aura presque sûrement un vainqueur,

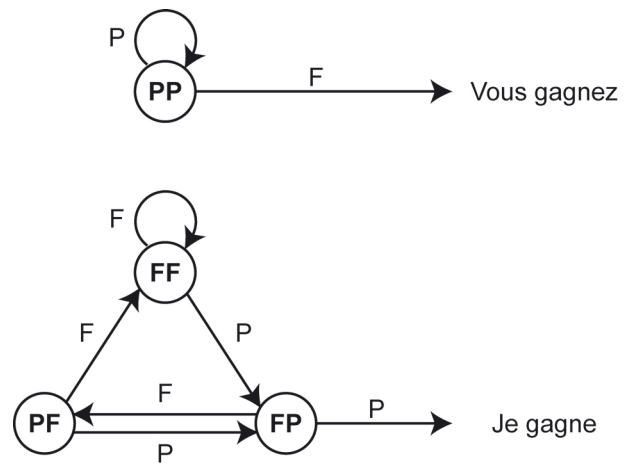


Figure 2. Schéma du mécanisme markovien du jeu de W. Penney.

et que nous n'allons pas lancer la pièce indéfiniment. Ceci découle simplement du fait que dans chaque composante du graphe, la probabilité d'atteindre une issue (disons en deux lancers) est strictement positive, et donc à la limite, la probabilité d'atteindre une issue (*i.e.* de désigner un vainqueur) vaut 1.

## IV Conclusion

Ces quelques exemples montrent que la prudence est souvent de mise pour les jeux de hasard, notre intuition étant souvent trompeuse. Toutefois, il serait un peu rapide de réduire les jeux à de simples calculs de probabilité : si vous aviez longtemps joué avec moi, peut-être auriez vous perdu quelque argent mais l'excitation du jeu, l'euphorie de quelques parties disputées et la joie de passer la soirée avec moi, valent bien une petite dépense, non ?

*Je tiens à remercier le rapporteur de cette note pour sa lecture attentive et ses suggestions pertinentes.*

# De drôles de dés !

par Max HOCHART

Lorsque l'on joue aux petits chevaux, on lance deux dés comportant six faces numérotées de 1 à 6, puis on additionne les nombres apparaissant sur les faces supérieures. La probabilité d'obtenir 2 est  $\frac{1}{36}$  (il faut faire deux 1), tout comme celle d'obtenir le fameux double-six, finalement pas plus rare que le double-un ! Les probabilités d'obtenir 3 ou 11 sont égales à  $\frac{2}{36}$ , celles d'obtenir 4 ou 10 sont égales à  $\frac{3}{36}$ , et ainsi de suite. La somme la plus probable est 7 avec une probabilité égale à  $\frac{6}{36}$ . Une question se pose : existe-t-il une autre paire de dés que les dés normaux, mais qui aboutisse à la même distribution des sommes (c'est-à-dire  $\frac{1}{36}$  pour 2 et 12, etc.) ? La réponse est oui ! Il suffit de prendre deux dés dont les faces portent les numéros 1, 2, 2, 3, 3, 4 pour l'un et 1, 3, 4, 5, 6, 8 pour l'autre. Mais le plus surprenant est que cette autre paire est la seule possible.

Une identité polynomiale très simple résume à elle seule les différentes probabilités des sommes obtenues avec deux dés normaux :

$$(z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6)^2 =$$

$$z^2 + 2z^3 + 3z^4 + 4z^5 + 5z^6 + 6z^7 + 5z^8 + 4z^9 + 3z^{10} + 2z^{11} + z^{12}$$

Plus généralement, prenons des entiers strictement positifs  $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_6$  et  $b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_6$ . En développant le produit

$$(z^{a_1} + z^{a_2} + \dots + z^{a_6}) (z^{b_1} + z^{b_2} + \dots + z^{b_6}),$$

le coefficient devant  $z^k$  est égal au nombre de couples  $(i, j) \in \{1, \dots, 6\}^2$  tels que  $k = a_i + b_j$ . La recherche d'une autre paire de dés revient à factoriser le polynôme

$$P(z) = (z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6)^2$$

sous la forme  $A(z)B(z)$ , où

$$A(z) = z^{a_1} + z^{a_2} + \dots + z^{a_6}$$

et

$$B(z) = z^{b_1} + z^{b_2} + \dots + z^{b_6}.$$

Notons que  $A(z)$  et  $B(z)$  sont à coefficients entiers positifs et que

$$A(1) = B(1) = 6.$$

Puisque les  $a_i, b_j$  sont strictement positifs, on a également

$$A(0) = B(0) = 0.$$

Par ailleurs, pour  $z \neq 1$ ,

$$\begin{aligned} z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6 &= z \frac{1 - z^6}{1 - z} \\ &= z \frac{1 - z^3}{1 - z} (1 + z^3) \\ &= z(1 + z + z^2) \\ &\quad (1 + z)(1 - z + z^2), \end{aligned}$$

ce qui nous donne la liste des facteurs irréductibles sur  $\mathbb{Z}$  de  $A(z)$  et  $B(z)$  puisque les polynômes  $1 + z + z^2$  et  $1 - z + z^2$  sont de discriminants strictement négatifs. Pour fabriquer  $A(z)$  et  $B(z)$ , on dispose des facteurs  $z, 1 - z + z^2, 1 + z$  et  $1 + z + z^2$ , chacun en deux exemplaires. En  $z = 1$ , ces polynômes prennent respectivement les valeurs 1, 1, 2, 3. Il est impossible de mettre les deux facteurs  $1 + z + z^2$  dans le même polynôme (disons dans  $A(z)$ ), sinon 9 diviserait  $A(1) = 6$ . Idem pour les deux facteurs  $1 + z$ , sinon 4 diviserait 6. On met alors  $(1 + z)(1 + z + z^2)$  dans  $A(z)$  et dans  $B(z)$ . Puisque  $A(0) = B(0) = 0$ , on distribue un  $z$  pour  $A(z)$  et l'autre pour  $B(z)$ . Restent les deux facteurs  $1 - z + z^2$ . Si l'on en donne un à  $A(z)$  et l'autre à  $B(z)$ , on retrouve les dés normaux avec

$$A(z) = B(z) = z(1 + z)(1 - z + z^2)(1 + z + z^2).$$

La seule autre possibilité est de mettre les deux  $1 - z + z^2$  dans le même polynôme, disons dans  $A(z)$ . Ça marche ! On trouve

$$\begin{aligned} A(z) &= z(1 + z)(1 + z + z^2)(1 - z + z^2)^2 \\ &= z + z^3 + z^4 + z^5 + z^6 + z^8 \end{aligned}$$

et

$$B(z) = z(1 + z)(1 + z + z^2) = z + 2z^2 + 2z^3 + z^4.$$

On a évidemment  $A(z)B(z) = P(z)$  puisque l'on a distribué tous les facteurs de  $P(z)$ . L'égalité  $A(1) = B(1) = 6$  est évidente et confirme que  $A(z)$  et  $B(z)$  sont composés de six monômes (donc correspondent à des dés à six faces). Enfin,  $A(0) = B(0) = 0$  assure que sur nos faces sont inscrits des entiers strictement positifs. La seule autre paire de dés est bien celle annoncée : 1, 2, 2, 3, 3, 4 et 1, 3, 4, 5, 6, 8.

La même démarche permet de traiter le cas de dés dodécaédraux. L'identité

$$(z + z^2 + \dots + z^{11} + z^{12})^2 = z^2 + 2z^3 + 3z^4 + 4z^5 + \dots + 3z^{22} + 2z^{23} + z^{24}$$

donne les sommes possibles ainsi que la probabilité de les obtenir : on a une chance sur  $12^2 = 144$  de faire 2 ou 24, deux chances sur 144 de faire 3 ou 23, trois chances sur 144 de faire 4 ou 22, et ainsi de suite jusqu'à 12 chances sur 144 de faire 13. Cherchons alors deux polynômes  $A(z)$  et  $B(z)$  à coefficients entiers positifs, vérifiant  $A(1) = B(1) = 12$  (nos dés ont douze faces),  $A(0) = B(0) = 0$  et

$$A(z)B(z) = (z + z^2 + \dots + z^{11} + z^{12})^2.$$

Pour cela, on factorise  $z + z^2 + \dots + z^{11} + z^{12}$ . Pour  $z \neq 1$ ,

$$z + z^2 + \dots + z^{11} + z^{12} = z \frac{1 - z^{12}}{1 - z} = z \frac{1 - z^6}{1 - z} (1 + z^6).$$

On a déjà factorisé plus haut

$$z \frac{1 - z^6}{1 - z} = z(1 + z + z^2)(1 + z)(1 - z + z^2).$$

Par ailleurs,

$$1 + z^6 = 1 - (-z^2)^3 = (1 + z^2)(1 - z^2 + z^4).$$

Ainsi,

$$z + z^2 + \dots + z^{11} + z^{12} = z(1 + z)(1 + z^2)(1 - z + z^2)(1 + z + z^2)(1 - z^2 + z^4).$$

Les polynômes de degré 2 sont de discriminants négatifs et ne peuvent être factorisés davantage par des polynômes à coefficients entiers. Qu'en est-il du polynôme  $1 - z^2 + z^4$ ? On peut le factoriser en  $(1 - \sqrt{3}z + z^2)(1 + \sqrt{3}z + z^2)$ , mais les polynômes qui apparaissent ne sont pas à coefficients entiers. Et toute factorisation par un polynôme de degré 1 ferait apparaître une racine complexe nécessairement non entière. On dispose donc maintenant de tous les facteurs irréductibles de  $z + z^2 + \dots + z^{11} + z^{12}$ , grâce auxquels on va fabriquer nos polynômes  $A(z)$  et  $B(z)$  :

$z, 1 + z, 1 + z^2, 1 - z + z^2, 1 + z + z^2, 1 - z^2 + z^4$ , chacun en deux exemplaires. Les conditions  $A(0) = B(0) = 0$  imposent de distribuer les deux  $z$  équitablement. Les autres polynômes valent 1, 2 ou 3 en  $z = 1$  et l'on veut que le produit fasse 12 en  $z = 1$ , ce qui nous oblige à donner à  $A(z)$  et  $B(z)$  un facteur  $1 + z + z^2$  (le seul valant 3 en  $z = 1$ ). Achéons la construction de  $A(z)$ . Il manque un facteur valant 4 en  $z = 1$ , facteur que l'on peut obtenir de trois façons :  $(1 + z^2)^2$  ou  $(1 + z)(1 + z^2)$  ou  $(1 + z)^2$ . On peut ensuite ajouter d'éventuels facteurs  $1 - z + z^2$  et  $1 - z^2 + z^4$  valant 1 en  $z = 1$ . Ainsi,  $A(z)$  est de la forme

$$A(z) = z(1 + z + z^2)(1 + z)^\alpha (1 + z^2)^{2-\alpha} (1 - z + z^2)^\beta (1 - z^2 + z^4)^\gamma,$$

où  $\alpha, \beta, \gamma$  sont dans  $\{0, 1, 2\}$ . Les polynômes restants vont dans  $B(z)$  :

$$B(z) = z(1 + z + z^2)(1 + z)^{2-\alpha} (1 + z^2)^\alpha (1 - z + z^2)^{2-\beta} (1 - z^2 + z^4)^{2-\gamma}.$$

Il reste à vérifier que les polynômes obtenus sont à coefficients positifs. Quelques polynômes sont rejetés, par exemple le triplet  $(\alpha, \beta, \gamma) = (1, 0, 2)$  fournit

$$A(z) = z^{14} + 2z^{13} + z^{12} - z^{11} - z^{10} + z^9 + 3z^8 + 3z^7 + z^6 - z^5 - z^4 + z^3 + 2z^2 + z.$$

On trouve en tout huit paires de dés possibles. Les calculs, bien que faciles, sont peu divertissants et un petit programme permet de les éviter. Il suffit de créer une procédure qui reçoit les arguments  $\alpha, \beta, \gamma$ , calcule les polynômes  $A(z)$  et  $B(z)$  et leur associe la liste ordonnée des puissances croissantes de leurs monômes, en répétant chaque puissance un nombre de fois égal au coefficient qui la précède.

Voici un programme possible, donné en *Maple*<sup>®</sup> :

```
des := proc(a, b, c) local A, B;
A := z*(1+z+z^2)*(1+z)^a*(1+z^2)^(2-a)
    *(1-z+z^2)^b*(1-z^2+z^4)^c;
B := simplify(sum(z^k, k=1..12)^2/A);
A := map(k->k$j=1..coeff(A, z, k),
    [k$k=1..20]);
B := map(k->k$j=1..coeff(B, z, k),
    [k$k=1..20]);
if nops(A)=12 and nops(B)=12 then A, B
else fail; fi;
end;
```

Le tableau I dresse la liste de tous les dés dodécaédraux donnant naissance au même hasard que la paire de dés normaux. Cette dernière est obtenue lorsque

les polynômes  $A(z)$  et  $B(z)$  sont égaux, ce qui a lieu pour le triplet  $\alpha = \beta = \gamma = 1$ . Notons que certains triplets aboutissent aux mêmes dés par symétrie des rôles joués par  $A$  et  $B$ . C'est le cas par exemple des triplets  $(1, 1, 2)$  et  $(1, 1, 0)$ .

Tableau 1. Dés dodécahédraux donnant le même hasard que les dés normaux.

| $(\alpha, \beta, \gamma)$ | dés  |
|---------------------------|--|
| $(0, 0, 1)$               | 1, 2, 3, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 9, 10, 11<br>1, 2, 4, 5, 5, 6, 8, 9, 9, 10, 12, 13  |
| $(0, 0, 2)$               | 1, 2, 3, 7, 7, 8, 8, 9, 9, 13, 14, 15<br>1, 2, 3, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 7, 8, 9    |
| $(0, 1, 1)$               | 1, 2, 2, 3, 5, 6, 6, 7, 9, 10, 10, 11<br>1, 3, 3, 5, 5, 7, 7, 9, 9, 11, 11, 13 |
| $(0, 1, 2)$               | 1, 3, 5, 7, 7, 9, 9, 11, 11, 13, 15, 17<br>1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 7  |
| $(1, 0, 0)$               | 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 6<br>1, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 14, 15, 18 |
| $(1, 0, 1)$               | 1, 2, 2, 3, 3, 4, 7, 8, 8, 9, 9, 10<br>1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 14  |
| $(1, 1, 0)$               | 1, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 7, 8<br>1, 2, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 15, 16  |
| $(1, 1, 1)$               | 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12<br>1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 |

## Références

- [1] R.L. Graham, D.E. Knuth et O. Patashnik, *Concrete mathematics*, Addison-Wesley Publishing Company, Reading, MA, second edition, 1994. A foundation for computer science.
- [2] D.J. Newman, *Analytic number theory*, volume 177 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1998.



# Rectangles noirs dans une image

par Jacques-Henri JOURDAN\*

## Résumé.

Le problème consistant à trouver les rectangles noirs d'aire maximale dans une image de pixels noirs et blancs est un exemple de la multiplicité des solutions que l'on peut obtenir pour un problème d'algorithmique. Nous en donnerons plusieurs, de performances croissantes, jusqu'à donner un algorithme particulièrement élégant permettant de résoudre le problème en temps linéaire.

## I Algorithme naïf

Le problème est le suivant : étant donné une image ( $I_{\ell c}$ ) de pixels noirs et blancs, quel est l'aire (ou le périmètre) maximale d'un rectangle noir ? On ne considère ici que les rectangles dont les bords sont parallèles aux bords de l'image. Un rectangle noir maximal est alors un rectangle de pixels noirs contenu dans aucun autre rectangle de pixels noirs.

L'algorithme naïf consiste en tester tous les rectangles possibles, et, pour chacun d'eux, vérifier qu'il ne contient bien que du noir.

Maxi ← 0

// On essaye chaque rectangle.

**Pour**  $l_1 \leftarrow 0 \dots L - 1$

**Pour**  $l_2 \leftarrow l_1 \dots L - 1$

**Pour**  $c_1 \leftarrow 0 \dots C - 1$

**Pour**  $c_2 \leftarrow c_1 \dots C - 1$

// Pour chaque rectangle, on regarde s'il est noir.

RectNoir ← VRAI

**Pour**  $l \leftarrow l_1 \dots l_2$

**Pour**  $c \leftarrow c_1 \dots c_2$

**Si**  $I_{\ell c} = \text{BLANC}$

RectNoir ← FAUX

// Si c'est le cas, mise à jour du maximum.

**Si** RectNoir

Maxi ← max(Maxi,  $(l_2 - l_1 + 1) \times (c_2 - c_1 + 1)$ )

**Renvoyer** Maxi

La complexité en temps est alors  $O(L^3 C^3)$ , en appelant respectivement  $L$  et  $C$  le nombre de lignes et de

colonnes de l'image. Nous allons voir que ceci peut largement être amélioré.

## II Partager des calculs

Tout d'abord, on peut voir que de nombreux calculs sont faits plusieurs fois, et on lit souvent la valeur d'un même pixel. Une idée que l'on peut avoir est d'extraire de l'image une forme synthétique des informations nécessaires à une étape du calcul. Une étape du calcul peut ici être, par exemple, le calcul de l'aire maximale de tous les rectangles noirs partageant une ligne inférieure.

Quelles sont les informations réellement nécessaires pour calculer le plus grand des rectangles noirs ayant  $\ell$  comme ligne inférieure ? Il s'agit en fait des hauteurs maximales de tous les rectangles de ce type de largeur 1 se terminant à la ligne  $\ell$ . Pour chaque colonne  $c$ , on définit  $h_\ell(c)$  la hauteur du rectangle correspondant. On peut voir sur la figure suivante un exemple d'image et de valeurs de  $h_\ell$ . Formellement :

$$h_\ell(c) = \max\{h \leq \ell + 1 \mid \forall \ell' \in [\ell - h + 1, \ell], I_{\ell', c} = \text{NOIR}\}$$

Le calcul de  $h_\ell$  est simple et efficace, car il peut se déduire de  $h_{\ell-1}$ . En effet, si le pixel  $I_{\ell c}$  est blanc, alors  $h_\ell(c) = 0$ . Sinon,  $h_\ell(c) = h_{\ell-1}(c) + 1$ .

On voit alors que la hauteur du plus grand rectangle noir situé entre les colonnes  $c_1$  et  $c_2$  et de ligne in-

\* jacques-henri.jourdan@ens.fr

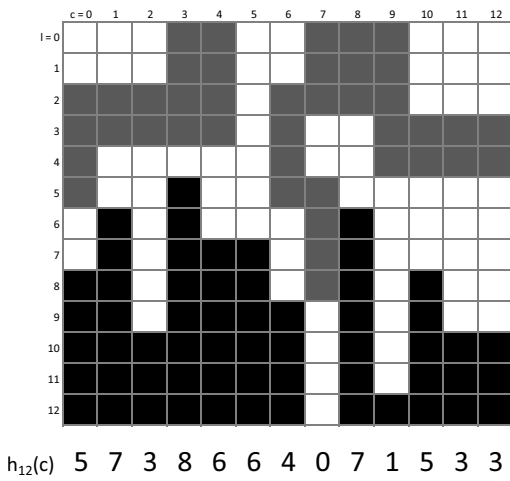


Figure 1. Exemple de valeurs de  $h_\ell$ , avec  $\ell = 12$ , la dernière ligne

férieure  $\ell$  est  $\min_{c_1 \leq c \leq c_2} h_\ell(c)$ . Grâce à cette idée, un algorithme plus performant apparaît : on calcule, pour chaque ligne  $\ell$ , les valeurs de  $h_\ell$ , puis on essaye, pour chaque paire de colonnes  $c_1 \leq c_2$ , de calculer l'aire maximale d'un rectangle de bord gauche  $c_1$  et de bord droit  $c_2$ . Enfin, le calcul de  $\min_{c_1 \leq c \leq c_2} h_\ell(c)$  peut se faire au fur et à mesure que  $c_2$  augmente. On obtient alors l'algorithme suivant, de complexité  $O(LC^2)$ .

// Initialisation du calcul de  $h_\ell$ .

Pour  $c \leftarrow 0 \dots C - 1$

$h_{-1}(c) \leftarrow 0$

Maxi  $\leftarrow 0$

Pour  $\ell \leftarrow 0 \dots L - 1$

// Calcul de  $h_\ell$

Pour  $c \leftarrow 0 \dots C - 1$

$h_\ell(c) \leftarrow \begin{cases} 0 & \text{si } I_{\ell c} = \text{BLANC} \\ h_{\ell-1}(c) + 1 & \text{sinon} \end{cases}$

// Enumération de tous les bords gauche et droit.

Pour  $c_1 \leftarrow 0 \dots C - 1$

$h \leftarrow +\infty$

Pour  $c_2 \leftarrow c_1 \dots C - 1$

$h \leftarrow \min(h, h_\ell(c_2))$

Maxi  $\leftarrow \max(\text{Maxi}, (c_2 - c_1 + 1) \times h)$

Renvoyer Maxi

### III Des rectangles en trop

Même après cette amélioration spectaculaire de l'algorithme, il reste de la place pour une amélioration : on voit que certains calculs sont superflus. En effet, on considère souvent des rectangles qui ne sont pas d'aire maximale, puisqu'ils peuvent clairement s'étendre par la droite, par la gauche ou par le bas. De tels rectangles n'ont pas forcément besoin d'être évalués.

Pour simplifier la suite, prenons, par convention  $h_\ell(-1) = h_\ell(C) = 0$ .

Reprenons donc l'algorithme précédent : étant donné une valeur de  $c_2$ , quelles sont les valeurs de  $c_1$  qui peuvent donner un rectangle inextensible par la gauche ? Il est nécessaire que la hauteur du rectangle en question soit plus grande que  $h_\ell(c_1 - 1)$ , c'est à dire que  $h_\ell(c_1 - 1) < \min_{c_1 \leq c \leq c_2} h_\ell(c)$ . Une telle valeur de  $c_1$  est dite intéressante. On peut voir sur la figure 2 un exemple de positions intéressantes.

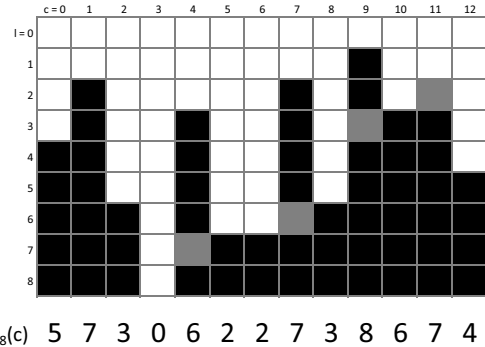


Figure 2. Exemple de valeurs de  $c_1$  intéressantes : on représente ici le cas où  $c_2 = 11$  (l'avant-dernière colonne). Une case grisée représente une valeur de  $c_1$  intéressante.

Lorsque l'on passe de  $c_2 - 1$  à  $c_2$ , une nouvelle valeur de  $c_1$  intéressante peut être  $c_2$  ou une valeur précédemment intéressante. Plus précisément, parmi ces candidats, ce sont ceux tels que  $h_\ell(c_1 - 1) < h_\ell(c_2)$ .

Il semble donc qu'il ne soit pas illusoire de boucler sur les valeurs de  $c_2$  en maintenant, dans une structure de donnée adaptée, l'ensemble des valeurs de  $c_1$  intéressantes. On souhaiterait aussi obtenir, grâce à cette structure de données, les valeurs des minimums  $\min_{c_1 \leq c \leq c_2} h_\ell(c)$ , afin de calculer les hauteurs des rectangles associés.

On peut pour cela utiliser une pile : chaque cellule de la pile contient un couple  $(c_1, \min_{c_1 \leq c \leq c_2} h_\ell(c))$  intéressant. Plus les éléments de la pile sont proches du sommet, plus  $c_1$  est proche de  $c_2$ , donc plus  $\min_{c_1 \leq c \leq c_2} h_\ell(c)$  est grand.

Se pose alors la question de la mise à jour de la pile lorsque l'on passe de  $c_2 - 1$  à  $c_2$ . On peut voir sur la figure 3 un exemple simple de ce qui se passe.

Lorsque l'on passe de  $c_2 - 1$  à  $c_2$ , on commence par empiler le couple  $(c_2, h_\ell(c_2))$ . Puis il faut « faire le tri » : retirer tous les candidats tels que  $h_\ell(c_1 - 1) \geq h_\ell(c_2)$ . Heureusement, il s'agit toujours d'éléments au sommet de la pile : il suffit donc de dépiler tant que le sommet est non valide. Enfin, il faut mettre à jour les valeurs de  $\min_{c_1 \leq c \leq c_2} h_\ell(c)$  pour les  $c_1$  restants. Mais, puisque  $h_\ell(c_1 - 1) < h_\ell(c_2)$  pour la valeur de  $c_1$  au sommet de la pile, on aura  $\min_{c_1 \leq c \leq c_2 - 1} h_\ell(c) < h_\ell(c_2)$ .

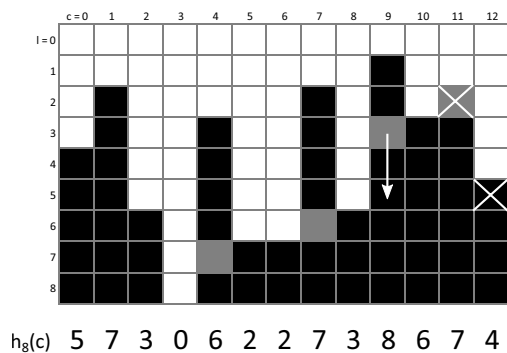


Figure 3. Exemple d'évolution de la pile : que se passe-t-il pour les valeurs de  $c_1$  intéressantes lorsque  $c_2$  passe de l'avant-dernière à la dernière colonne ?

pour les autres cellules de la pile. Donc seule la dernière cellule devra être mise à jour.

On obtient l'algorithme suivant, qui calcule, pour chaque valeur de  $c_2$ , les valeurs de  $c_1$  intéressantes correspondantes.

```

Intéressants ← Pile vide
Pour  $c_2 \leftarrow 0 \dots C - 1$ 
  Intéressants.empile( $c_2 - 1, h_l(c_2 - 1)$ )
  Tant que Intéressants.nonVide()
    Si  $h_\ell(\text{Intéressants.sommet}().c_1 - 1) \geq h_\ell(c_2)$ 
      // Le sommet de la pile n'est plus intéressant.
      Intéressants.dépfile()
    Sinon
      // On a fini de purger la pile.
      // Il faut mettre à jour le sommet.
      Intéressants.sommet().min $h_\ell \leftarrow h_\ell(c_2)$ 
  Interrompre tant que

```

Cet algorithme a un gros point fort : il s'exécute en temps  $O(C)$ . En effet, puisqu'on empile exactement  $C$  valeurs dans la pile, on sait que le corps de la boucle imbriquée ne sera exécuté que  $C$  fois, car il consiste à dépiler un élément de la pile.

## IV Il reste encore des rectangles inutiles

Récapitulons : nous savons calculer de manière très efficace, pour chaque dernière ligne et dernière colonne d'un rectangle noir, quelles sont les premières colonnes et premières lignes possibles d'un rectangle noir qui ne peut pas s'agrandir par en haut ou par la gauche.

Une solution possible est alors d'utiliser l'algorithme précédent et tester tous les  $c_1$  possibles pour une valeur de  $c_2$  donnée. Mais cela n'améliore pas les performances asymptotiques, car il peut y avoir beaucoup de valeurs de  $c_1$  à tester pour une valeur de  $c_2$  donnée.

Il reste cependant encore de la place pour une amélioration : certaines valeurs du couple  $(c_1, \min_{c_1 \leq c \leq c_2} h_\ell(c))$  restent longtemps dans la pile, et sont utilisées pour plusieurs  $c_2$ . Cela est inutile : pour une valeur du couple, la dernière utilisation correspond toujours à une extension par la droite des précédentes utilisations. L'idée est donc de n'utiliser un couple que lorsqu'on le retire de la pile : soit parce qu'il est dépilé, soit parce qu'il est modifié.

On obtient alors l'algorithme suivant. Il n'est pas beaucoup plus long que le premier, mais il s'exécute en temps  $O(LC)$  : en effet, il s'agit essentiellement de  $L$  exécutions de l'algorithme précédent. // Cet algorithme reprend les précédents

```

Pour  $c \leftarrow 0 \dots C - 1$ 
   $h_{-1}(c) \leftarrow 0$ 
  Maxi ← 0
  Pour  $\ell \leftarrow 0 \dots L - 1$ 
    Intéressants ← Pile vide
    Pour  $c \leftarrow 0 \dots C$ 
       $h_\ell(c) \leftarrow \begin{cases} 0 & \text{si } I_{\ell c} = \text{BLANC} \\ h_{\ell-1}(c) + 1 & \text{sinon} \end{cases}$ 
      Intéressants.empile( $c - 1, h_\ell(c - 1)$ )
      Tant que Intéressants.nonVide()
        // On va enlever ou modifier le sommet de la pile.
        // Il faut essayer prendre en compte ce rectangle.
        Maxi ← max(Maxi,
          ( $c - \text{Intéressants.sommet}().c_1$ )
           $\times P.\text{sommet}().\text{min}h_l$ )
        Si  $h_\ell(\text{Intéressants.sommet}().c_1 - 1) \geq h_\ell(c)$ 
          Intéressants.dépfile()
        Sinon
          Intéressants.sommet().min $h_\ell \leftarrow h_\ell(c_2)$ 
      Interrompre Tant que

```

**Renvoyer Maxi**

Une légère modification de cet algorithme permet de s'assurer que les rectangles noirs obtenus ne peuvent pas s'étendre dans aucune des quatre directions. On obtient alors un algorithme permettant d'énumérer tous les rectangles noirs maximaux, pour l'ordre de l'inclusion.



Qu'il soit rebelle ou impertinent, pédagogique ou fondamental, le contre-exemple montre les forces et les limites d'une théorie. Combien de fois n'a-t-il pas ébranlé des idées qui semblaient pourtant établies ?

Par Bertrand Hauchecorne

## Interversion de l'ordre d'intégration

La première rencontre que l'on peut faire avec les intégrales doubles se trouve sous la plume d'Isaac Newton. Le savant anglais a élaboré entre 1664 et 1666 sa théorie du calcul intégral. Il attend cependant 1687 pour publier ses travaux dans un énorme traité appelé *Principia mathematica*. Dans une étude sur l'attraction gravitationnelle, il intègre successivement une fonction de deux variables par rapport à l'une puis à l'autre. Cependant, il justifie son calcul par des arguments géométriques.

### Les premières intégrales multiples

La véritable étude des fonctions de deux ou plusieurs variables débute dans la première moitié du XVIII<sup>e</sup> siècle avec Euler, Clairaut et d'Alembert, avant tout pour résoudre des équations aux dérivées partielles secondes. Certains, comme Euler, sont amenés à intégrer successivement par rapport à une variable puis à l'autre, sans trop se poser de question. Cependant, vers 1770, le savant suisse commence à avoir une conception claire de l'intégrale double sur un domaine fermé et explique comment la calculer. Quelques années plus tard, presque simultanément, Lagrange et Laplace s'intéressent à des intégrales triples provenant de problèmes de mécanique et effectuent des changements de variable sur de telles intégrales. En 1832/33, Gustav Jacobi utilise le déterminant pour préciser ce résultat mais c'est le mathématicien belge Eugène

Catalan qui énonce le premier correctement le théorème de changement de variable à l'aide du jacobien.

Entre-temps, dans son cours donné à l'École polytechnique, Augustin-Louis Cauchy, après avoir énoncé le théorème de dérivation sous le signe  $\int$ , justifie l'interversion de l'ordre de sommation pour l'intégrale double d'une fonction continue sur un rectangle.

### De Riemann à Lebesgue

En étudiant des conditions de développement d'une fonction périodique en séries trigonométriques, Bernhard Riemann est conduit à étendre la notion d'intégrale à des fonctions non continues. Tant qu'on se contentait d'intégrer des fonctions continues sur un rectangle, la notion d'existence des intégrales ne se posait pas. Avec la théorie du mathématicien allemand et les suivantes, apparaît le problème d'intégrabilité de la fonction des deux variables et de celle des deux intégrales successives.

Plusieurs mathématiciens, parmi lesquels le Français Camille Jordan et l'Autrichien Otto Stolz, étudient alors les conditions d'interversion de l'ordre d'intégration pour une fonction de deux variables. En fait les deux intégrales peuvent exister sans que la fonction soit intégrable et parfois, l'interversion de ces deux intégrales ne se vérifie pas. Donnons-en un exemple :

Considérons le domaine  $\Gamma = [0, 1] \times [0, 1]$  et  $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$  si  $(x, y) \neq (0, 0)$  et  $f(0, 0) = 0$ .

Pour tout  $x \in ]0, 1]$ , on obtient après calculs (Voir [5] p. 287),  $\int_0^1 f(x, y) dy = \frac{1}{x^2 + 1}$  donc

$$\int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y) dy = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{4}.$$

Comme  $f(x, y) = -f(y, x)$ , on a clairement  $\int_0^1 dy \int_0^1 f(x, y) dx = -\frac{\pi}{4}$ .

La fonction n'est bien sûr pas intégrable au sens de Riemann ; en effet, elle n'est pas bornée sur  $\Gamma$  puisque  $f(x, 0) = 1/x^2$ . On peut aussi remarquer que  $\int_0^1 f(0, y) dy$  n'est pas définie ce qui n'est pas grave puisque  $\{0\}$  est de mesure nulle (Voir d'autres exemples dans [5] p. 282 à 287.)

Pendant, l'introduction, en 1902, d'une nouvelle notion d'intégrale par Henri Lebesgue repose la justification du même problème dans ce nouveau cadre.

## Fubini et Tonelli

En 1907, un jeune professeur italien, Guido Fubini se rend célèbre en énonçant et en démontrant un théorème ramenant une intégrale double (ou de surface) à deux intégrales simples. Il énonce le résultat que voici avec le charme de la traduction littérale :

*si  $f(x, y)$  est une fonction de deux variables  $x, y$ , bornée ou non bornée, intégrable sur un domaine  $\Gamma$  du plan, alors on a toujours :*

$$\int_{\Gamma} f(x, y) d\sigma = \int dy \int f(x, y) dx = \int dx \int f(x, y) dy$$

quand avec  $d\sigma$ , on désigne l'élément d'aire de  $\Gamma$ .

En 1911, il ajoute une sorte de réciproque en affirmant que l'existence de  $\int_a^b dx \int_c^d |f(x, y)| dy$  est une condition suffisante d'intégrabilité de  $f$  sur  $[a, b] \times [c, d]$ . Peu après Guido Fubini s'aperçoit qu'un mathématicien peu connu, Leonida Tonelli, avait obtenu ce résultat deux ans avant lui. Très honnêtement il le fait savoir en publiant l'énoncé démontré par ce dernier que voici (toujours en traduction littérale.)

*Une fonction  $f(x, y)$  mesurable superficiellement, pour laquelle  $\int_a^x dx \int_b^y |f(x, y)| dy$  existe, est intégrable superficiellement ; et pour elle, on a*

$$\begin{aligned} \int_a^x dx \int_b^y f(x, y) dy &= \int_a^y dy \int_b^x f(x, y) dx \\ &= \iint_{[a,b] \times [c,d]} f(x, y) dx dy. \end{aligned}$$

Depuis lors, le résultat complet est connu sous le nom de théorème de Fubini-Tonelli.

La notion d'intégrale impropre, en particulier sur un intervalle de la forme  $[a, +\infty[$  peut se définir avec chaque notion d'intégrale. Dans ce cas encore, les intégrales successives peuvent exister sans s'intervertir comme dans l'exemple suivant :

posons pour  $x, y \geq 1$ ,  $f(x, y) = \frac{x-y}{(x+y)^3}$ . Alors pour tout  $x \geq 1$ , nous avons

$$\int_1^{+\infty} dy \int_1^{+\infty} f(x, y) dx = - \int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+y)^2} dy = 1/2.$$

En invertissant les rôles de  $x$  et  $y$ , on obtient

$$\int_1^{+\infty} dx \int_1^{+\infty} f(y, x) dy = 1/2.$$

Or  $f(x, y) = -f(y, x)$  donc  $\int_1^{+\infty} dx \int_1^{+\infty} f(x, y) dy = -1/2$ .

## Références

- [1] Textes en questions par N. Verdier et C. Gérini *Quadrature* n° 82 et 83 (2011).
- [2] Résumé des leçons sur le calcul infinitésimal par A-L. Cauchy, leçon 33 (1823) (republié par Ellipses, 1994)
- [3] Sugli integrali multipli par Guido Fubini *Rend. Lincei* (1907 p. 608 à 614.)
- [4] Su un teorema relativo agli integrali dopii par Guido Fubini *Rend. Lincei* (1913 p. 67.)
- [5] Contre-exemples en mathématiques, 2<sup>ème</sup> édition, par Bertrand Hauchecorne (Ellipses 2007 p. 282 à 287).

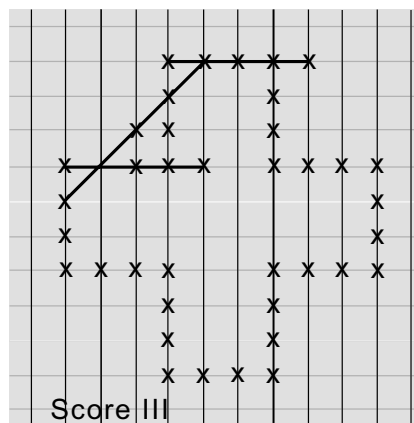
## La géométrie du quadrilatère complet

On connaît la richesse de la géométrie du triangle en propriétés et éléments remarquables (points, droites, cercles, etc.). Considérer 4 droites qui, prises 3 à 3, forment 4 triangles, ouvre la voie à de nouveaux développements : cercle de Miquel, droite de Steiner-Miquel, points de Morley ou de Kantor-Hervey, courbes (parabole, deltoïde, cardioïdes) tangentes aux quatre droites... Sur ce sujet, déjà effleuré dans *Quadrature* (voir par exemple le problème E.274 dans les numéros 64 et 73), Bernard Keiser a entrepris un inventaire très complet, qui joint à l'érudition un aspect esthétique avec ses nombreuses figures. Ce travail substantiel est consultable sur le site : <http://bernardkeiser.blogspot.fr/>

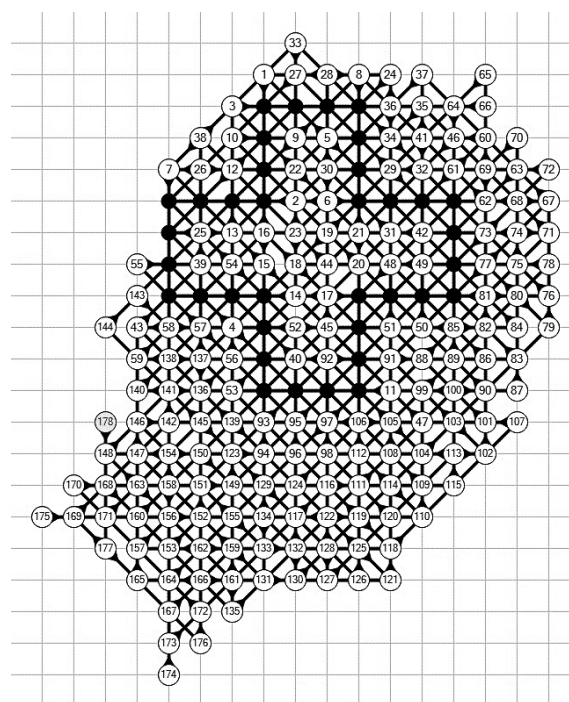
Jean Moreau de Saint-Martin

## Le morpion solitaire

Connaissez-vous le jeu du « morpion solitaire » ? Il a surtout fait fureur chez les élèves et étudiants des années 70 et 80, suite aux nombreuses rubriques de Pierre Berloquin parues dans *Science & Vie*. Les règles sont enfantines, et on y joue seul : en prenant une feuille de papier quadrillée, et en dessinant une grande croix grecque, le but est de faire le maximum de coups, chaque coup devant aligner cinq points (le nouveau point avec quatre déjà existants), jusqu'à ce que plus aucun coup ne soit possible. L'extraordinaire record de 170 coups obtenu à la main en 1976 par le jeune étudiant Charles-Henri Bruneau, maintenant devenu professeur de mathématiques à l'Université de Bordeaux, aura fait l'objet de nombreuses études universitaires dans le monde, et aura tenu plus de 30 ans ! Ce record manuel n'a été battu par les ordinateurs que récemment, suite aux travaux de l'américain Chris Rosin : 172 coups en 2010, 177 coups puis 178 coups en 2011, le record actuel, dont voici la partie ci-contre.



Le principe du jeu.



Le record en 178 coups de Rosin.

Mais connaissez-vous l'origine de ce jeu qui semble être apparu en France ? Connaissez-vous des références, livres ou articles, publiés avant la première rubrique de Berloquin de 1974 ? Quel est votre plus ancien témoignage de joueur ? Merci de contacter Christian Boyer (cboyer@club-internet.fr), auteur de [www.morpionsolitaire.com](http://www.morpionsolitaire.com), ou d'écrire au journal qui transmettra.

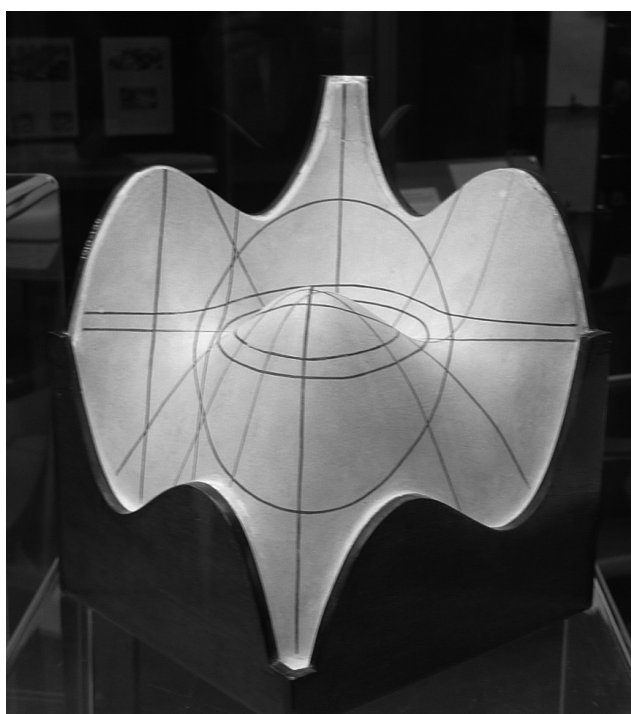
Christian Boyer

## Représentation des surfaces algébriques

Nous poursuivons l'inventaire des modèles de surfaces en plâtre avec cette photo d'un moulage réalisé par le professeur Chrystal pour illustrer ses cours sur les équations au début du XX<sup>ème</sup> siècle. Georges Chrystal, professeur de mathématiques à l'Université d'Edimbourg, compte parmi les membres fondateurs de la *Edinburgh Mathematical Society*. Ce moulage représente la surface d'équation

$$z = 3a(x^2 - y^2) - (x^3 + y^3).$$

Des courbes en couleur sont tracées sur la surface (une ligne droite bleue, des ellipses vertes, des cubiques en jaune, etc.). Cet objet se trouve au musée des sciences de l'Imperial College à Londres.



Surface algébrique de degré trois.

La rédaction

## Mathematic Park

Depuis 2010, Mathematic Park est un séminaire de mathématiques, qui se réunit une fois par mois (hors vacances scolaires) à 15h à l'Institut Henri Poincaré (IHP) à Paris.

L'objectif du séminaire est de proposer des mini-cours de mathématiques à destination des élèves des premiers cycles universitaires (dont les classes préparatoires), des élèves de terminale motivés, des ensei-

gnants et plus généralement de tous les amateurs de mathématiques.



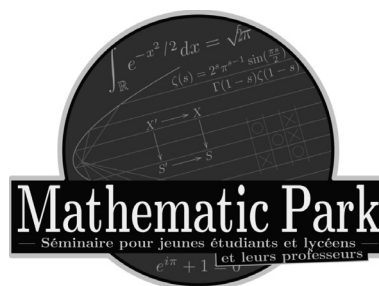
Une séance de Mathematic Park (exposé de Vincent Beffara, le 12 octobre 2013).

Le format consiste en un exposé d'une heure et demie, suivi d'un goûter convivial servi à la cafétéria de l'IHP permettant de réunir les participants, l'orateur et les organisateurs autour d'une discussion décontractée. Les exposés correspondent à des mini-cours : fouillés avec des énoncés précis, des éléments de preuve, pour un public qui est demandeur de plus de mathématiques.

D'un point de vue pratique, l'inscription est gratuite mais obligatoire sur le site <http://www.ihp.fr/seminaire/mathematic-park>

**Nouveauté :** les organisateurs essaient, grâce au soutien complet de l'IHP, de capter les exposés puis de les diffuser sur la chaîne YouTube de l'IHP <http://www.youtube.com/user/PoincareInstitute>

où l'on trouve également de nombreux autres exposés mathématiques (de tous niveaux). Lors des trois derniers exposés, la diffusion en direct sur cette chaîne a été expérimentée avec succès et devrait être mise en œuvre autant que possible.



Le logo de Mathematic Park.

**Prochaines séances :** 1er février : Sylvia Serfaty ; 15 mars : Laurent Desvillettes.

**Roger Mansuy**

