Exercice 1.

Un rail rectiligne de chemin de fer de 5 km de long fixé sur un sol plan par ses extémités, subit une dilatation qui augmente sa longueur de 1 mm. Il se courbe alors dans un plan vertical en prenant la forme d'un arc de cercle. Calculer la hauteur au dessus du sol du point le plus haut de cet arc de cercle.

Exercice 2.

Le but de l'exercice est de prouver qu'une fonction qui admet un développement limité à tout ordre n'est pas forcément dérivable à tout ordre.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$x \longmapsto \begin{cases} e^{-1/x^2} \sin\left(e^{1/x^2}\right) & \text{si } x \neq 0\,, \\ 0 & \text{si } x = 0\,. \end{cases}$$

1. Montrer que le développement limité de f en 0 est nul à tout ordre.

2. Montrer que f est dérivable mais pas continûment dérivable en 0.

Exercice 3.

Déterminer les réels a et b tels que

$$f(x) = \cos(x) - \frac{1+ax^2}{1+bx^2}$$

soit, au voisinage de 0, un infiniment petit d'ordre le plus grand possible.

Exercice 4.

Déterminer les développements limités de :

1. $x \mapsto 3e^x - 2\,\ell\mathrm{n}(1+x)$ au voisinage de 0, à l'ordre 2.

2. $x \mapsto \cos x\,\ell\mathrm{n}(1+x)$ au voisinage de 0, à l'ordre 4.

3. $x \mapsto \sin(x)(1+x)^{-1/3}$ au voisinage de 0, à l'ordre 3.

4. $x \mapsto \dfrac{\ell\mathrm{n}\, x}{\sqrt{x}}$ au voisinage de 1, à l'ordre 3.

5. $x \mapsto e^x$ au voisinage de 2, à l'ordre 3.

6. $x \mapsto \dfrac{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{x}$, au voisinage de $+\infty$, à l'ordre 4.

Exercice 5.

Déterminer la limite en 1^+ de l'expression

$$\frac{x^x - 1}{\ell\mathrm{n}\left(1 - \sqrt{x^2-1}\right)}.$$

Exercice 6.

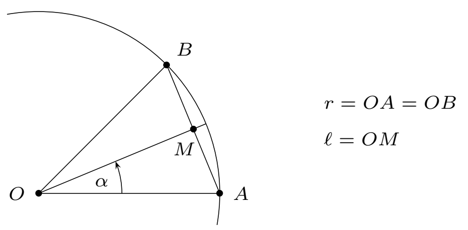
Donner un équivalent en 0 de l'expression

$$\ell\mathrm{n}\left(\frac{e^x+1}{2}\right) - \frac{4x+x^2}{8}.$$

1. Solutions

Solution 1.

On utilise le graphique (non-proportionnel) ci-dessous.



Notons toutes les longueurs en mètres. On sait que la longueur du segment entre les extrémité A et B vaut 5000 et que la longueur de l'arc de cercle entre A et B vaut 5000.001. Notons $r = OA$ le rayon du cercle, M le milieu entre A et B et $\ell = OM$. Avec les notations du dessin :

$$\begin{aligned} r^2 &= \ell^2 + 2500^2 \\ 2\alpha r &= 5000.001 \\ r\sin(\alpha) &= 2500 \end{aligned}$$

Les deux dernières équations de ce système permettent de déterminer r et α. On peut utiliser un logiciel qui sait traiter numériquement de telles équations non-linéaires. Mais si on ne dispose que d'une simple calculatrice on doit faire autrement ! On utilise alors le développement limité $\sin(\alpha) \approx \alpha - \frac{1}{6}\alpha^3$, valable pour α proche de zéro. (Cela convient car dans la situation présente α est effectivement très petit.)
Nos calculs sont désormais approximatifs, c'est-à-dire les signes $=$ sont en réalité des $\approx$.

$$\begin{cases} r\alpha = 2500.0005 \\ r\alpha - \frac{1}{6}r\alpha^3 = 2500 \end{cases}$$

On peut résoudre ce système de plusieurs manières. Par soutraction des égalités on obtient $\frac{1}{6}r\alpha^3 = 0.0005$ et donc

$$\alpha^2 = \frac{r\alpha^3}{r\alpha} = \frac{0.003}{2500.0005}$$

Par conséquent

$$r = \frac{2500.0005}{\alpha} = \sqrt{\frac{2500.0005^3}{0.003}} = 2282178.$$

Enfin, la hauteur demandée est

$$r - \ell = r - \sqrt{r^2 - 2500^2} = 1.37.$$

Le point le plus élévé sur l'arc se trouve à environ 1.37 mètres au-dessus du sol. Je trouve ce résultat étonnant ! C'est la raison pour laquelle la SNCF laisse toujours un petit espace entre les rails...

Solution 2.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Nous avons

$$\left|\frac{f(x)}{x^n}\right| \leqslant \frac{\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{|x|^n}$$

Or la dernière fraction tend vers zéro quand $x \to 0$ (croissance comparé). On conclût que $f(x) \underset{x\to 0}{=} o(x^n)$.

2. Il est clair que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et on calcule facilement

$$f'(x) = \frac{2f(x)}{x^3} - \frac{2}{x^3}\cos\left(\exp\frac{1}{x^2}\right), \quad x \neq 0.$$

Nous savons déjà que le premier terme $\frac{2f(x)}{x^3}$ converge vers 0 lorsque x tend vers 0. Considérons la suite

$$x_k = \frac{1}{\sqrt{\ell n(2k\pi)}}, \quad k \in \mathbb{N}^*.$$

Elle tend vers 0 et

$$\lim_{k\to\infty} f'(x_k) = \lim_{k\to\infty}\left(-\frac{2}{x_k^3}\right) = -\lim_{k\to\infty}(\ell n(2k\pi))^{\frac{3}{2}} = -\infty.$$

Donc f' n'est pas continue en 0.

Solution 3.

On a

$$\cos(x) \underset{0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$

et

$$\begin{aligned} \frac{1+ax^2}{1+bx^2} &\underset{0}{=} (1+ax^2)\big(1 - bx^2 + b^2x^4 - b^3x^6 + o(x^6)\big) \\ &\underset{0}{=} 1 + (a-b)x^2 + (b^2 - ab)x^4 + o(x^4) \end{aligned}$$

d'où

$$f(x) \underset{0}{=} (-1/2 - a + b)x^2 + (1/24 - b^2 + ab)x^4 + o(x^4).$$

Comme le système

$$b - a = 1/2, \quad 1/24 = b^2 - ab = b(b-a) = b/2$$

admet pour unique solution

$$(a,b) = (-5/12, 1/12),$$

L'expression $f(x)$ est un infiniment petit d'ordre le plus grand possible *si et seulement si*

$$a = -\frac{5}{12} \text{ et } b = \frac{1}{12}.$$

Solution 4.

1. $3e^x - 2\,\ell n(1+x) = 3 + x + \frac{5}{2}x^2 + \circ(x^2)$.

2. On a $\ell n(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + o(x^4)$ et $\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)$ (on s'arrête ici à x^3, car le plus petit terme dans $\ell n(1+x)$ est x, donc les termes de degré $\geqslant 4$ dans $\cos x$ donneraient dans le produit des termes de degré $\geqslant 5$). On obtient donc :

$$\begin{aligned}\cos x\,\ell n(1+x) &= \left[\left(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4\right)\left(1 - \frac{1}{2}x^2\right)\right]_4 + o(x^4)\\ &= x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4)\end{aligned}$$

(les termes en x^4 se simplifient).

3. On a $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$, et

$$\begin{aligned}(1+x)^{-1/3} &= 1 - \frac{x}{3} + \frac{-1}{3}(\frac{-1}{3} - 1)\frac{x^2}{2} + o(x^2)\\ &= 1 - \frac{x}{3} + \frac{2}{9}x^2 + o(x^2)\ .\end{aligned}$$

(on s'arrête ici à x^2, car le plus petit terme dans $\sin x$ est x, donc les termes de degré $\geqslant 3$ dans $(1+x)^{-1/3}$ donneraient dans le produit des termes de degré $\geqslant 4$)
On obtient donc :

$$\begin{aligned}\sin(x)(1+x)^{-1/3} &= \left[\left(x - \frac{x^3}{6}\right)\left(1 - \frac{x}{3} + \frac{2}{9}x^2\right)\right]_3 + o(x^3)\\ &= x - \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{18}x^3 + o(x^3)\ .\end{aligned}$$

4. On pose $h = x - 1$: $\frac{\ell n\, x}{\sqrt{x}} = \frac{\ell n(1+h)}{\sqrt{1+h}}$, et on connaît les développements limités de $\ell n(1+h)$ et $\frac{1}{\sqrt{1+h}}$ en 0, donc on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{\ell n(1+h)}{\sqrt{1+h}} &= \left[\left(h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3}\right)\left(1 - \frac{h}{2} + \frac{3}{8}h^2 - \frac{5}{16}h^3\right)\right]_3 + o(h^3)\\ &= h - h^2 + \frac{23}{24}h^3 + o(h^3)\end{aligned}$$

En revenant à la variable initiale, on a donc le développement limité suivant au voisinage de 1 :

$$\frac{\ell n\, x}{\sqrt{x}} = x - 1 - (x-1)^2 + \frac{23}{24}(x-1)^3 + o\Big((x-1)^3\Big)\ .$$

5. On pose $h = x - 2$: $e^x = e^{h+2} = e^2 e^h = e^2(1 + h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{6} + o(h^3))$, d'où :

$$e^x = e^2\Big(1 + (x-2) + \frac{(x-2)^2}{2} + \frac{(x-2)^3}{6} + o\Big((x-2)^3\Big)\Big)\ .$$

6. On pose $h = \frac{1}{x}$: $\dfrac{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = h\cos h$. Pour obtenir le développement à l'ordre 4 en 0 de $h\cos h$, il suffit d'écrire celui de $\cos h$ à l'ordre 3 : $\cos h = 1 - \frac{h^2}{2} + o(h^3)$, d'où $h\cos h = h - \frac{h^3}{2} + o(h^4)$ et ainsi :

$$\frac{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^3} + o\Big(\frac{1}{x^4}\Big)\ .$$

Solution 5.

Puisque
$$\lim_{x\to 1} x\,\ell n(x) = 0,$$
On a au voisinage à droite de 1 ,
$$x^x - 1 = e^{x\,\ell n(x)} - 1 \underset{1+}{\sim} x\,\ell n(x),$$
donc, en notant $f(x)$ l'expression de l'énoncé,
$$f(x) \underset{1+}{\sim} \frac{x\,\ell n(x)}{-\sqrt{x^2-1}}.$$

Or,
$$\ell n(x) \underset{1}{\sim} x-1,$$
et
$$\sqrt{x^2-1} \underset{1+}{\sim} \sqrt{2}\sqrt{x-1}.$$
Ainsi
$$f(x) \underset{1+}{\sim} -\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{x-1}$$
et
$$\lim_{x\to 1+} f(x) = 0.$$

Solution 6.

On a au voisinage de 0,
$$\frac{e^x+1}{2} \underset{0}{=} 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{48}x^4 + \mathrm{o}(x^4)$$
de plus,
$$\ell n(1+u) \underset{0}{=} u - \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{3}u^3 - \frac{1}{4}u^4 + \mathrm{o}(u^4)$$
Posons
$$u = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{48}x^4$$
et appliquons le théorème de composition des DL.

u	$\frac{x}{2}$	$\frac{x^2}{4}$	$\frac{x^3}{12}$	$\frac{x^4}{48}$
$-\frac{u^2}{2}$	0	$-\frac{x^2}{8}$	$-\frac{x^3}{8}$	$-\frac{7x^4}{96}$
$\frac{u^3}{3}$	0	0	$\frac{x^3}{24}$	$\frac{x^4}{16}$
$-\frac{u^4}{4}$	0	0	0	$-\frac{x^4}{64}$
$\ell n\left(\frac{e^x+1}{2}\right)$	$\frac{x}{2}$	$\frac{x^2}{8}$	0	$-\frac{x^4}{192}$

D'où
$$f(x) \underset{0}{=} -\frac{1}{192}x^4 + \mathrm{o}(x^4)$$
et donc
$$f(x) \underset{0}{\sim} -\frac{1}{192}x^4.$$