Exercice 1.

Soit f une fonction définie au voisinage d'un point x_0. Comparer les deux propriétés suivantes :

a. $\lim_{h\to 0}(f(x_0+h)-f(x_0))=0$.

b. $\lim_{h\to 0}(f(x_0+h)-f(x_0-h))=0$.

Exercice 2.

Soient $k\in\mathbb{R}$ et $h>0$. Déterminer $\lim_{t\to\pm\infty}\lfloor kt\rfloor/\lfloor ht\rfloor$.

Exercice 3.

Calculer $\lim_{x\to 1}\dfrac{e^x-e^{1/x}}{\sqrt{x^3}-\sqrt[3]{x}}$.

Exercice 4.

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$ croissante telle que

$$\lim_{x\to+\infty}(f(2x)-f(x))=0.$$

Montrer que $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{\ell n\, x}=0$.

Exercice 5.

Montrer que toute fonction périodique f qui admet une limite finie en $+\infty$ est constante.

Exercice 6.

Soient $a>1$ et $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+^*$ une fonction croissante telle que $\lim_{x\to\infty}\dfrac{f(ax)}{f(x)}=1$.

1. Montrer que pour tout $b>0$ on a $\lim_{x\to\infty}\dfrac{f(bx)}{f(x)}=1$.

2. Connaissez-vous une fonction non constante qui a cette propriété ?

Exercice 7.

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que les suites

$$(u_{2n})_{n\geqslant 0}\ ,\ (u_{2n+1})_{n\geqslant 0}\ \text{et}\ (u_{3n})_{n\geqslant 0}$$

convergent. Prouver que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge.

Exercice 8.

On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par

$$u_n=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est monotone et qu'elle est convergente.

2. Établir une majoration de la forme

$$\forall n\in\mathbb{N}^*\ :\quad u_{2n}\leqslant cu_n+\varepsilon_n,$$

où $c>0$ et $\lim_{n\to\infty}\varepsilon_n=0$. En déduire la limite de $(u_n)_{n\geqslant 1}$.

Exercice 9.

Soient $\geqslant 1$ et

$$H_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}.$$

1. Montrer que $(H_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante. Quelle alternative en déduit-on quant au comportement asymptotique de $(H_n)_{n\geqslant 1}$?

2. Montrer que $\forall n\geqslant 1$,

$$H_{2n}-H_n\geqslant\frac{1}{2}.$$

Décrire le comportement de $(H_n)_{n\geqslant 1}$.

1. Solutions

Solution 1.

Montrons que a) entraîne b). En remplaçant h par $-h$ dans a), nous avons $\lim_{h\to 0}(f(x_0-h)-f(x_0))=0$. Donc

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}(f(x_0+h)-f(x_0-h)) &= \lim_{h\to 0}(f(x_0+h)-f(x_0)-(f(x_0-h)-f(x_0)))\\ &= \lim_{h\to 0}(f(x_0+h)-f(x_0))-\lim_{h\to 0}(f(x_0-h)-f(x_0))=0-0=0\end{aligned}$$

Remarque – *En fait, la propriété a) signifie que f est continue en x_0.*

La propriété b) n'entraîne pas en général a), comme le montre le contrexemple suivant : on définit f sur $\mathbb{R}$ par $f(t)=1$, si $t\in\mathbb{R}^*$ et $f(0)=0$. Au point $x_0=0$ la fonction f vérifie bien la propriété b) mais pas la propriété a).

Remarque – *Pour le contrexemple toute fonction paire et discontinue en 0 fonctionne.*

Solution 2.

Si $k=0$, nous avons $\lim_{t\to\pm\infty}\lfloor kt\rfloor/\lfloor ht\rfloor=0$. Supposons que $k\neq 0$. On a

$$(*)\qquad \frac{\lfloor kt\rfloor}{\lfloor ht\rfloor}=\frac{k}{h}\,\frac{\lfloor kt\rfloor}{kt}\,\frac{ht}{\lfloor ht\rfloor}.$$

On a $\lim_{x\to+\infty}\lfloor x\rfloor/x=\lim_{y\to-\infty}\lfloor y\rfloor/y=1$. En effet c'est une conséquence des encadrements suivants, valables pour tous $x>0$ et $y<0$:

$$\frac{x-1}{x}<\frac{\lfloor x\rfloor}{x}\leqslant 1\,,\qquad \frac{y-1}{y}>\frac{\lfloor y\rfloor}{y}\geqslant 1\,.$$

On conclût avec $(*)$ que

$$\lim_{|t|\to\infty}\frac{\lfloor kt\rfloor}{\lfloor ht\rfloor}=\frac{k}{h}\lim_{|t|\to\infty}\frac{\lfloor kt\rfloor}{kt}\lim_{|t|\to\infty}\frac{ht}{\lfloor ht\rfloor}=\frac{k}{h}\,.$$

Solution 3.

Il s'agit d'une limite de type « $\frac{0}{0}$ ». On utilise l'idée du marquis de L'Hôpital :

$$f(x)=e^x-e^{1/x}=e^x-e^{x^{-1}},\qquad g(x)=\sqrt{x^3}-\sqrt[3]{x}=x^{3/2}-x^{1/3}$$

$$f'(x)=e^x+x^{-2}e^{x^{-1}},\qquad g'(x)=\frac{3}{2}x^{1/2}-\frac{1}{3}x^{-2/3}.$$

On a $f(1)=g(1)=0$ et

$$\lim_{x\to 1}\frac{e^x-e^{1/x}}{\sqrt{x^3}-\sqrt[3]{x}}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{f(x)-f(1)}{x-1}}{\frac{g(x)-g(1)}{x-1}}=\frac{f'(1)}{g'(1)}=\frac{2e}{\frac{3}{2}-\frac{1}{3}}=\frac{12e}{7}.$$

Solution 4.

Montrons d'abord que pour $n\in\mathbb{N}^*$, $\lim_{n\to+\infty}\frac{f(2^n)}{n}=0$. Posons $u_n=f(2^{n+1})-f(2^n)$. Par hypothèse, $\lim_{n\to+\infty}u_n=0$.

$$\frac{f(2^n)}{n}=\frac{u_0+u_1+\cdots+u_{n-1}}{n}+\frac{f(1)}{n}$$

Le lemme de Césaro nous dit alors que $\lim_{n\to+\infty}\frac{f(2^n)}{n}=0$.

Soit maintenant $x\in]1;+\infty[$. Il existe $n\in\mathbb{N}^*$ tel que $2^n\leqslant x<2^{n+1}$: il suffit de prendre $n=\left\lfloor\frac{\ell n\,x}{\ell n\,2}\right\rfloor$.

$$0\leqslant\frac{f(x)}{\ell n\,x}\leqslant\frac{f(2^{n+1})}{n\,\ell n\,2}$$

Or $n\to+\infty$ quand $x\to+\infty$ et $\frac{f(2^{n+1})}{n\,\ell n\,2}\to 0$ d'après ce qui précède.

Solution 5.

Notons l la limite de f en $+\infty$. Soient T une période de f et $x \in D_f$. Comme $x + n_T \to \infty$ quand $n \to \infty$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x+nT) = l$. Mais la suite $(f(x+nT))_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à $f(x)$. D'où $f(x) = l$.

Solution 6.

1. On a
$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(a^2x)}{f(ax)} = \lim_{y\to\infty}\frac{f(ay)}{f(y)} = 1.$$
De même on obtient par récurrence que
$$(*) \qquad \forall n\in\mathbb{N}: \quad \lim_{x\to\infty}\frac{f(a^{n+1}x)}{f(a^nx)} = 1.$$
Soit maintenant $b \geqslant 1$ donné. Comme $a > 1$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $a^N \leqslant b < a^{N+1}$. Puisque f est croissante et positive, cet encadrement implique le suivant :
$$\forall x\in\mathbb{R}: \quad \frac{f(a^Nx)}{f(x)} \leqslant \frac{f(bx)}{f(x)} \leqslant \frac{f(a^{N+1}x)}{f(x)}.$$
Par télescopage
$$\frac{f(a^Nx)}{f(x)} = \frac{f(a^Nx)}{f(a^{N-1}x)}\,\frac{f(a^{N-1}x)}{f(a^{N-2}x)}\cdots\frac{f(ax)}{f(x)}.$$
D'après $(*)$ on a $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(a^Nx)}{f(x)} = 1$ et de même $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(a^{N+1}x)}{f(x)} = 1$. Finalement, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(bx)}{f(x)} = 1$.

Soit maintenant $0 < b < 1$. Alors en posant $y = bx$ et en utilisant ce qui précède pour $\frac{1}{b} > 1$ on obtient à nouveau
$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(bx)}{f(x)} = \lim_{y\to\infty}\frac{f(y)}{f(\frac{y}{b})} = \lim_{y\to\infty}\left(\frac{f(\frac{y}{b})}{f(y)}\right)^{-1} = 1^{-1} = 1.$$

2. Oui, toute fonction qui, sur un voisinage de l'infini, coïncide avec le logarithme convient :
$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{\ell n(ax)}{\ell n(x)} &= \lim_{x\to\infty}\frac{\ell n(a)+\ell n(x)}{\ell n(x)}\\ &= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\ell n(a)}{\ell n(x)}+1\right) = 1.\end{aligned}$$

Solution 7.

Notons ℓ_1, ℓ_2 et ℓ_3 les limites respectives des suites :
$$(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}, \quad (u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}} \text{ et } (u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}.$$
La suite de terme générale u_{6n} étant extraite de $(u_{3n})_{n\geqslant 0}$ mais également de $(u_{2n})_{n\geqslant 0}$, elle converge vers ℓ_3 et ℓ_1, d'où $\ell_3 = \ell_1$ par unicité de la limite. De même, la suite de terme générale u_{6n+3} étant extraite de $(u_{3n})_{n\geqslant 0}$ mais également de $(u_{2n+1})_{n\geqslant 0}$, elle converge vers ℓ_3 et ℓ_2, d'où $\ell_3 = \ell_2$ par unicité de la limite. Ainsi $\ell_1 = \ell_2$ et, d'après le cours, $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge.

Solution 8.

1. Puisque $u_1 = 1$ et $u_2 = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right) < \frac{1}{2}(1+1) = u_1$ la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ doit être décroissante si elle est monotone. On calcule pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$\begin{aligned}u_n - u_{n+1} &= \frac{1}{n}\left(\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\\
&= \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}}\\
&= \frac{1}{n+1}\left[\frac{1}{n}\left(\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right]\\
&\geqslant \frac{1}{n+1}\left[\frac{1}{n}\underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}_{n \text{ fois}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right] = \frac{1}{n+1}\left[\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right] > 0\end{aligned}$$
Donc la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et, puisqu'elle est minorée par 0, elle converge vers une limite $\ell \geqslant 0$.

2. La sous-suite de terme général u_{2n} est encore convergente de limite ℓ. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$\begin{aligned}u_{2n} &= \frac{1}{2n}\left(\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2n}}\right) = \frac{u_n}{2}+\frac{1}{2n}\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2n}}\right)\\
&\leqslant \frac{u_n}{2}+\frac{1}{2n}\underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)}_{n \text{ fois}} = \frac{u_n}{2}+\frac{1}{2\sqrt{n+1}}.\end{aligned}$$
En passant à la limite dans cette inégalité on obtient $\ell \leqslant \ell/2$, d'où $\ell \leqslant 0$. On en déduit que $\ell = 0$.

Solution 9.

1. Pour tout $n \geqslant 1$,

$$H_{n+1} - H_n = \frac{1}{n+1} > 0,$$

la suite $(H_n)_{n\geqslant 1}$ est donc croissante. On en déduit, d'après le théorème des suites monotones , qu'elle est soit majorée et convergente, soit non majorée et tend vers $+\infty$ avec n.

2. Pour tout $n \geqslant 1$,

$$H_{2n} - H_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k},$$

or $\forall n+1 \leqslant k \leqslant 2n$,

$$\frac{1}{k} \geqslant \frac{1}{2n},$$

d'où

$$H_{2n} - H_n \geqslant \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$

On montre que H_n tend vers $+\infty$ par l'absurde : supposons le contraire , d'après le résultat de la question **1.**, $(H_n)_{n\geqslant 1}$ est donc convergente de limite $\ell \in \mathbb{R}$. La suite extraite $(H_{2n})_{n\geqslant 1}$ converge aussi vers ℓ, d'où par passage à la limite dans l'inégalité obtenue à la question **2.** :

$$0 \geqslant \frac{1}{2},$$

ce qui est absurde. Ainsi,

$$\lim_{n\to+\infty} H_n = +\infty.$$