Exercice 1.

Déterminer l'ensemble S des triplets $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ vérifiant les deux propriétés suivantes :

- $0 < a \leqslant b \leqslant c$.
- Quelque soit $n \in \mathbb{N}$ il existe un triangle de cotés a^n, b^n, c^n.

Exercice 2.

Soit $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{R})$ telle que $A\,{}^tA = 0$. Montrer que $A = 0$. Peut-on généraliser ce résultat sur $\mathbb{C}$?

Exercice 3.

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer A^2 et exprimer A^2 en fonction de A et $\mathbb{I}_3$ où $\mathbb{I}_3$ est la matrice identité de taille 3.
2. En déduire que A est inversible et calculer son inverse.

Exercice 4.

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer $A^3 - A$.
2. En déduire que A est inversible puis déterminer A^{-1}.

Exercice 5.

Soit $n \geqslant 2$. Prouver l'inversibilité et calculer l'inverse des matrices $n \times n$ suivantes,

1. $\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & & 1 & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$;
2. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 6.

Prouver l'inversibilité et calculer l'inverse des matrices suivantes,

1. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$;
2. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$;
3. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$;
4. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Exercice 7.

On dit qu'une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est *stochastique* si elle est à coefficients positifs et si la somme des éléments de chaque colonne vaut 1. Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ deux matrices stochastiques. Montrer que AB est stochastique.

Exercice 8.

Soient $A \subset B \subset \mathbb{R}$ avec $A \neq \varnothing$ et B bornée. Montrer que A est bornée et comparer les bornes inférieures et supérieures de A et B.

Exercice 9.

Soient A et B deux parties non vides et bornées de $\mathbb{R}$. Montrer que $A \cup B$ est non vide et bornée et que

$$\sup(A \cup B) = \max\big[\sup(A), \sup(B)\big]$$

et

$$\inf(A \cup B) = \min\big[\inf(A), \inf(B)\big].$$

Exercice 10.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note s_n la somme des chiffres de l'écriture décimale de n.

1. Montrer que $s_n \leqslant 9(\log_{10} n + 1)$.
2. Montrer que la suite $\left(\frac{s_{n+1}}{s_n}\right)$ est bornée. Quelles sont les bornes supérieure et inférieure de l'ensemble des valeurs de cette suite ? Sont-elles atteintes ?

1. Solutions

Solution 1.

Trois réels x, y, z avec $0 < x \leqslant y \leqslant z$ sont les côtés d'un triangle si et seulement si $x + y > z$. Supposons que $(a, b, c) \in S$. Autrement dit, $0 < a \leqslant b \leqslant c$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $a^n + b^n > c^n$; ou encore

$$\left(\frac{a}{c}\right)^n + \left(\frac{b}{c}\right)^n > 1.$$

Si $b < c$ alors $0 < \frac{a}{c} < \frac{b}{c} < 1$ et on obtient la contradiction

$$0 = \lim_{n\to\infty} \left[\left(\frac{a}{c}\right)^n + \left(\frac{b}{c}\right)^n\right] > 1.$$

On a donc $b = c$. On vient de démontrer que si $(a, b, c) \in S$ alors $b = c$. Réciproquement, il est clair que tout triplet de la forme (a, b, b) où $0 < a \leqslant b$ est dans S. En conséquence,

$$S = \{(a, b, b) \mid 0 < a \leqslant b\}.$$

L'ensemble S correspond au triangles isocèles.

Solution 2.

Notons $B = A\,{}^tA$. Fixons $1 \leqslant i \leqslant n$. On a $b_{ii} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}^2 = 0$. Puisque $a_{ik}^2 \geqslant 0$, ceci implique que $a_{ik} = 0$ pour tout $1 \leqslant k \leqslant p$. On en conclut que tous les coefficients de A sont nuls, donc $A = 0$.

Pour des matrices complexes la propriété n'est plus vraie, comme le montre le contre-exemple de la matrice $A = \binom{1}{i}$. Mais on a

$$\forall\, A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{C}) \ : \ A\,{}^t\overline{A} = 0 \implies A = 0.$$

Solution 3.

1. On trouve
$$A^2 = A + 2\mathbb{I}_3.$$
2. On a donc
$$A\left(\frac{A - \mathbb{I}_3}{2}\right) = \mathbb{I}_3$$

et ainsi A est inversible d'inverse

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Solution 4.

1. Un calcul donne $A^3 - A = 4\mathbb{I}_3$.
2. On a
$$A \times \frac{1}{4}(A^2 - \mathbb{I}_3) = \mathbb{I}_3,$$

ainsi A est inversible et

$$A^{-1} = \frac{1}{4}(A^2 - \mathbb{I}_3) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Solution 5.

1. Il est clair que le carré de la matrice vaut l'identité : est donc inversible et égale à son propre inverse.

2. Notons M la matrice de l'énoncé et U la matrice $(1)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. Puisque $M + I_n = U$ et que $U^2 = nU$, on a
$$(M + I_n)^2 = n(M + I_n),$$

ie $M^2 + (2 - n)M = (n - 1)I_n$. Ainsi,

$$M\left(\frac{M}{n-1} - \frac{n-2}{n-1}I_n\right) = I_n.$$

La matrice M est donc inversible d'inverse

$$M^{-1} = \frac{M}{n-1} - \frac{n-2}{n-1}I_n = \frac{U}{n-1} - I_n.$$

Solution 6.

1. Appliquons la méthode du pivot de Gauss...

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

par $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$,

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

puis, en effectuant $L_2 \leftrightarrow L_3$,

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

continuons par $L_3 \leftrightarrow -(L_3 \leftarrow L_3 + L_2)$,

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right]$$

enfin, par $L_1 \leftrightarrow L_1 - L_3$,

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right].$$

La matrice A est donc inversible d'inverse

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. Appliquons la méthode du pivot de Gauss...

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

par $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$,

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

puis, en effectuant $L_2 \leftrightarrow -L_3$ et $L_3 \leftarrow L_2$,

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

continuons par $L_3 \leftrightarrow L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2$,

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

puis, par $L_2 \leftrightarrow L_2 + L_3$ et $L_1 \leftrightarrow L_1 + L_3$,

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

enfin, par $L_2 \leftrightarrow L_1 \leftrightarrow L_1 - L_2$,

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

La matrice B est donc inversible d'inverse

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

3. Appliquons la méthode du pivot de Gauss...

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

et, par l'opération $L_1 \leftrightarrow L_3$,

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

puis, en effectuant les opérations $L_2 \leftrightarrow L_2 + L_1$ et $L_3 \leftarrow (L_3 - 2L_1)/3$,

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & 0 & -2/3 \end{array}\right]$$

enfin, par $L_1 \leftrightarrow L_1 + L_3$,

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & 0 & -2/3 \end{array}\right].$$

La matrice C est donc inversible d'inverse

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1/3 & 0 & -2/3 \end{pmatrix}.$$

4. Appliquons la méthode du pivot de Gauss...

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

et, par l'opération $L_1 \leftrightarrow L_2$,

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

puis $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ et $L_4 \leftarrow L_4 - 4L_1$,

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 4 & 0 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

et, par $L_4 \leftarrow L_4 - (L_2 + L_3)$,

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -1 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

continuons par les opérations $L_4 \leftarrow L_4/2$ et $L_3 \leftarrow -(L_3 - 2L_2)/5$,

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2/5 & -4/5 & -1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/2 & -1 & -1/2 & 1/2 \end{array}\right]$$

puis par $L_3 \leftrightarrow L_4$,

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/2 & -1 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2/5 & -4/5 & -1/5 & 0 \end{array}\right]$$

effectuons $L_4 \leftarrow L_4 - L_3$,

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/2 & -1 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 9/10 & 1/5 & 3/10 & -1/2 \end{array}\right]$$

puis $L_2 \leftarrow L_2 - 3(L_3 + L_4)$,

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1/5 & 2/5 & 3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/2 & -1 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 9/10 & 1/5 & 3/10 & -1/2 \end{array}\right]$$

et enfin $L_1 \leftarrow L_1 + L_3$,

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1/2 & 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1/5 & 2/5 & 3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/2 & -1 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 9/10 & 1/5 & 3/10 & -1/2 \end{array}\right]$$

La matrice D est donc inversible d'inverse

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & -1/2 & 1/2 \\ -1/5 & 2/5 & 3/5 & 0 \\ -1/2 & -1 & -1/2 & 1/2 \\ 9/10 & 1/5 & 3/10 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

Solution 7.

Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,q]\!]$. Alors

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}B_{kj} \geqslant 0$$

comme somme de termes positifs.
Soit $j \in [\![1,q]\!]$. La somme des coefficients de la $j^{\text{ème}}$ colonne de AB est :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n}(AB)_{ij} &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{p} A_{ik}B_{kj} \\ &= \sum_{k=1}^{p}\left(B_{kj}\sum_{i=1}^{n} A_{ik}\right) \quad = \sum_{k=1}^{p} B_{kj} \qquad \text{car } \sum_{i=1}^{n} A_{ik} = 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Ainsi AB est stochastique.

Solution 8.

Notons $\mathcal{M}_A$ et $\mathcal{M}_B$ l'ensemble des majorants de A et de B. Soit M un majorant de B. Pour tout x appartenant à $A \subset B$, on a $x \leqslant M$, donc A est majorée et M est un majorant de A ; puisque cela est vrai pour tout $M \in \mathcal{M}_B$, on a

$$\mathcal{M}_B \subset \mathcal{M}_A,$$

donc

$$\sup(A) \leqslant \sup(B).$$

En raisonnant de même avec les ensembles de minorants, on prouve que

$$\inf(B) \leqslant \inf(A).$$

Solution 9.

Soit $x \in A \cup B$. Alors, puisque $x \in A$ ou $x \in B$,

$$x \leqslant \max\big[\sup(A), \sup(B)\big],$$

$A \cup B$ est donc majoré et $\sup(A \cup B)$ étant le plus petit majorant de $A \cup B$,

$$\sup(A \cup B) \leqslant \max\big[\sup(A), \sup(B)\big].$$

De plus,puisque A et B sont inclus dans $A \cup B$,

$$\sup(A) \leqslant \sup(A \cup B) \ \text{ et } \ \sup(B) \leqslant \sup(A \cup B),$$

et ainsi

$$\sup(A \cup B) \geqslant \max\big[\sup(A), \sup(B)\big],$$

et finalement

$$\sup(A \cup B) = \max\big[\sup(A), \sup(B)\big].$$

On prouve sans peine selon le même schéma la formule

$$\inf(A \cup B) = \min\big[\inf(A), \inf(B)\big].$$

Solution 10.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et k le nombre de chiffres de l'écriture décimale de n. On a donc $n \geqslant 10^{k-1}$ i.e. $k \leqslant \log_{10} n + 1$ et $s_n \leqslant 9k$ puisque tout chiffre est inférieur ou égal à 9. Finalement, on obtient bien $s_n \leqslant 9(\log_{10} n + 1)$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notons p le nombre de chiffres 9 par lequel se termine l'écriture décimale de n. Lorsque l'on ajoute 1 à n, on transforme les p derniers chiffres 9 en des 0 et on ajoute 1 au chiffre précédent les p derniers chiffres 9. Ainsi $s_{n+1} = s_n - 9p + 1 \leqslant s_n + 1$. On a donc $\frac{s_{n+1}}{s_n} \leqslant 1 + \frac{1}{s_n} \leqslant 2$ puisque $s_n \geqslant 1$. Bien évidemment, on a également $\frac{s_{n+1}}{s_n} \geqslant 0$. Ainsi $\left(\frac{s_{n+1}}{s_n}\right)$ est bien bornée.
Puisque $\frac{s_2}{s_1} = 2$, la borne supérieure de $\left\{\frac{s_{n+1}}{s_n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$ est 2 et elle est atteinte (c'est donc un maximum). De plus $\frac{s_{10^k}}{s_{10^k-1}} = \frac{1}{9k} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$ donc 0 est la borne inférieure de $\left\{\frac{s_{n+1}}{s_n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$. Cette borne n'est pas atteinte puisque $\frac{s_{n+1}}{s_n} > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.