

Exercice 1.

On considère la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ définie par

$$u_n = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \right).$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est monotone et qu'elle est convergente.
2. Majorer u_{2n} à l'aide de u_n .
3. Trouver la limite de $(u_n)_{n \geq 1}$.

Exercice 2.

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ les suites définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \sqrt{n} - \lfloor \sqrt{n} \rfloor, \alpha_n = u_{n^2},$$

$$\beta_n = u_{n^2+3n}.$$

1. Donner une expression simple de α_n , pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. En déduire la convergence et la limite de $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
2. Etude de $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
 - 2.a. Etablir que $\forall n \in \mathbb{N}^*, (n+1)^2 \leq n^2 + 3n < (n+2)^2$.
 - 2.b. En déduire une expression simple de β_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
 - 2.c. Etablir la convergence et calculer la limite de $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
3. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge-t-elle ?

Exercice 3.

Soient a et b deux nombres réels distincts et n un nombre entier supérieur ou égal à 2.

On pose $P = X^n$, $Q_1 = (X-a)(X-b)$ et $Q_2 = (X-a)^2$. On veut déterminer (en fonction de a, b et n) le reste de la division euclidienne de P par Q_1 (respectivement par Q_2), que l'on notera R_1 (respectivement R_2).

1. Quel est au maximum le degré de R_1 ? Même question avec R_2 .
2. Exprimer $R_1(a)$ et $R_1(b)$ en fonction de a, b et n . En déduire ce que vaut le polynôme R_1 .
3. Exprimer $R_2(a)$ et $R_2'(a)$ en fonction de a et n . En déduire ce que vaut le polynôme R_2 .

Exercice 4.

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On considère le polynôme

$$P = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sin(k\theta) X^k.$$

1. Soit $z \in \mathbb{C}$. Démontrer que $P(z) = 0$ si, et seulement si,

$$(1 + ze^{i\theta})^n = (1 + ze^{-i\theta})^n.$$
2. En déduire que toutes les racines de P sont réelles.

Exercice 5.

The purpose of this exercise is to show that it is impossible to generate prime numbers polynomially.

- a. Let $P \in \mathbb{Z}[X]$. Show that for all $n, k \in \mathbb{Z}$, $P(n)$ divides $P(n+kP(n))$.
- b. Show that there exists no non-constant polynomial $P \in \mathbb{Z}[X]$ such that $P(n)$ is prime for every integer $n \gg 0$.
- c. Show that the previous statement also holds in $\mathbb{R}[X]$.

1. Solutions

Solution 1.

1. Pour $1 \leq k \leq n$, nous avons

$$1/\sqrt{n+1} \leq 1/\sqrt{k}.$$

En sommant membre à membre ces inégalités, on obtient $1/\sqrt{n+1} \leq u_n$. L'inégalité précédente, et le fait que

$$u_{n+1} = \frac{n}{n+1}u_n + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}},$$

entraînent que $u_{n+1} \leq u_n$. D'autre part, la suite est minorée par 0, donc convergente vers une limite $\ell \geq 0$, puisque décroissante.

Solution 2.

1. On a bien-sûr que la suite (α_n) est nulle donc elle converge vers 0.

2. Etude de $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

2.a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$n^2 + 3n - (n+1)^2 = n-1 \geq 0 \text{ et } (n+2)^2 - n^2 - 3n = n+4 > 0$$

ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, (n+1)^2 \leq n^2 + 3n < (n+2)^2.$$

2.b. On a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, n+1 \leq \sqrt{n^2 + 3n} < n+2,$$

et donc $\lfloor \sqrt{n^2 + 3n} \rfloor = n+1$ puis $\beta_n = \sqrt{n^2 + 3n} - (n+1)$.

2.c. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\beta_n = \sqrt{n^2 + 3n} - \sqrt{(n+1)^2} = \frac{n^2 + 3n - (n+1)^2}{\sqrt{n^2 + 3n} + n+1} = \frac{n-1}{\sqrt{n^2 + 3n} + n+1}$$

Ainsi,

$$\beta_n = \frac{n-1}{n(\sqrt{1+3/n} + 1 + 1/n)} \sim \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$

et la suite (β_n) est convergente de limite 1/2.

3. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas car admet deux sous-suites (α_n) et (β_n) convergente mais de limites différentes.

Solution 3.

1. Comme le degré de Q_1 (respectivement Q_2) vaut 2, le degré de R_1 (respectivement R_2) est inférieur ou égal à 1. Il existe donc deux réels α_1 et β_1 tels que $R_1 = \alpha_1 X + \beta_1$ et deux réels α_2 et β_2 tels que $R_2 = \alpha_2 X + \beta_2$.

2. Il existe $T_1 \in \mathbb{R}[X]$ tel que $X^n = (X-a)(X-b)T_1 + R_1$. Donc $R_1(a) = a^n$ et $R_1(b) = b^n$. On doit alors résoudre le système :

$$\begin{cases} \alpha_1 a + \beta_1 = a^n \\ \alpha_1 b + \beta_1 = b^n \end{cases}$$

Comme $a \neq b$, ce système admet l'unique solution suivante :

2. Nous avons l'inégalité

$$u_{2n} \leq \frac{u_n}{2} + \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

3. La sous-suite de terme général u_{2n} est aussi convergente de même limite; en passant à la limite, dans l'inégalité de la question 2, on obtient $\ell \leq \ell/2$. On en déduit que $\ell = 0$.

$$(\alpha_1, \beta_1) = \left(\frac{a^n - b^n}{a - b}, ab \frac{b^{n-1} - a^{n-1}}{a - b} \right).$$

3. Il existe $T_2 \in \mathbb{R}[X]$ tel que $X^n = (X-a)^2 T_2 + R_2$. En dérivant cette égalité on obtient $nX^{n-1} = 2(X-a)T_2 + (X-a)^2 T_2' + R_2'$. On en déduit que $R_2(a) = a^n$ et $R_2'(a) = na^{n-1}$. Comme $R_2' = \alpha_2$, on doit cette fois-ci résoudre le système :

$$\begin{cases} \alpha_2 a + \beta_2 = a^n \\ \alpha_2 = na^{n-1} \end{cases}$$

On obtient ici l'unique solution suivante :

$$(\alpha_2, \beta_2) = (na^{n-1}, (1-n)a^n).$$

Solution 4.

1. D'après la formule du binôme, pour tout nombre complexe z ,

$$(1 + e^{i\theta}z)^n - (1 + e^{-i\theta}z)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (e^{ik\theta} - e^{-ik\theta}) z^k = 2iP(z).$$

D'où la propriété à prouver.

2. Soit $z \in \mathbb{C}$ une racine de P . Posons $a = e^{i\theta}$. D'après la question précédente $|1 + az| = |1 + \bar{a}z|$. Autrement dit, il existe $b \in \mathbb{C}$ avec $|b| = 1$ tel que $1 + az = b(1 + \bar{a}z)$. On obtient

$$z = \frac{1 - b}{b\bar{a} - a}.$$

Par conséquent z est réel car

$$\bar{z} = \frac{1 - \bar{b}}{\bar{b}a - \bar{a}} \times \frac{b}{b} = \frac{b - 1}{a - \bar{a}b} = z.$$

Solution 5.

a. Let $P = a_nX^n + \dots + a_1X + a_0$. Then we have the following congruence modulo $P(n)$

$$\begin{aligned} P(n + kP(n)) &\equiv a_n(n + kP(n))^n + \dots + a_1(n + kP(n)) + a_0 \pmod{P(n)} \\ &\equiv a_n(n + k \times 0)^n + \dots + a_1(n + k \times 0) + a_0 \pmod{P(n)} \\ &\equiv P(n) \equiv 0 \pmod{P(n)}. \end{aligned}$$

Thus $P(n)$ divides $P(n + kP(n))$.

b. Suppose $P \in \mathbb{Z}[X]$ is a non-constant polynomial and $N \in \mathbb{N}$ such that $P(n)$ is prime for all $n \geq N$. We can suppose N big enough such that $x \mapsto P(x)$ is strictly increasing on $[N, \infty[$. We have $1 < P(N) < P(N + P(N))$ and $P(N)$ divides $P(N + P(N))$ after the preceding question. Therefore $P(N + P(N))$ is not prime. Contradiction!

c. We will need the following lemma.

Lemma : If a polynomial of degree $n - 1$ takes integer values on n integer points, then all its coefficients are rational.

Proof : The coefficients are solution of a linear system in \mathbb{Z} with an invertible $n \times n$ (Vandermonde) matrix.

Now suppose there exist a non-constant polynomial $Q \in \mathbb{R}[X]$ and $N \in \mathbb{N}$ such that $Q(n)$ is prime for all $n \geq N$.

According to the lemma, Q must be in $\mathbb{Q}[X]$. Thus there exists $q \in \mathbb{N}^*$ such that $P = qQ \in \mathbb{Z}[X]$. For any integer k denote by $\varphi(k)$ the number of divisors of k . Since $Q(n)$ is prime for all $n \geq N$ one has

$$(*) \quad \forall n \geq N, \quad \varphi(P(n)) = \varphi(qQ(n)) \leq 2\varphi(q).$$

Let $(N_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$ be the sequence defined recursively by $N_0 = N$ and $N_{\ell+1} = N_\ell + P(N_\ell)$. Assuming that we have chosen N big enough such that $x \mapsto Q(x)$ is strictly increasing on $[N, \infty[$, we deduce that $(P(N_\ell))_{\ell \in \mathbb{N}}$ is strictly increasing.

According to the first question $P(N_\ell)$ divides $P(N_{\ell+1})$. Then the all the $2\varphi(q) + 1$ distinct numbers $P(N_0), \dots, P(N_{2\varphi(q)})$ divide $P(N_{2\varphi(q)+1})$. This is a contradiction because $(*)$ implies that $P(N_{2\varphi(q)+1})$ has at most to $2\varphi(q)$ divisors.