

Exercice 1.

What is the determinant of the transposition map T of $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$?

Exercice 2.

On pose, pour $a, b, c \in \mathbb{R}$:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix}$$

1. Calculer $A^t A$.
2. On suppose que $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Prouver que

$$|\det(A)| \leq 1.$$

Exercice 3.

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de colonnes C_1, C_2, \dots, C_n . Pour tout $1 \leq k \leq n$, on pose

$$D_k = \sum_{i \neq k} C_i.$$

On note M la matrice de colonnes D_1, \dots, D_n . Calculer $\det(M)$ en fonction de $\det(A)$.

Exercice 4.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{K}_2[X]$ défini par

$$P \mapsto P + P'.$$

Calculer $\det(f)$. Que peut-on déduire?

Exercice 5.

Déterminant et projecteurs.

1. Soient p un projecteur d'un \mathbb{R} -espace vectoriel E de dimension finie et $\lambda \in \mathbb{R}$. Calculer

$$\det(id_E + \lambda p)$$

en fonction de $\dim(\text{Im}(p))$ et λ .

2. Soient $n \geq 1$ et $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. Calculer le déterminant de la matrice $M = (m_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ définie par

$$\begin{cases} m_{i,j} = a_i a_j & \text{pour } i \neq j \\ m_{i,i} = 1 + a_i^2 & \text{pour } \forall 1 \leq i \leq n \end{cases}$$

Exercice 6.

Calculer le déterminant de la matrice $\left(\binom{n+i}{j} \right)_{0 \leq i, j \leq p}$ avec $0 \leq p \leq n$.

1. Solutions

Solution 1.

We represent the endomorphism T by its matrix in the canonical basis \mathcal{B} of $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ consisting of the matrices $E_{\ell k}$, $(\ell, k) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, where $E_{\ell k}$ is the $n \times n$ matrix having entry 1 in (ℓ, k) and being 0 elsewhere. We order these matrices in the following way (it will keep computations simple) :

- The first n matrices of the basis \mathcal{B} are the diagonal matrices $E_{11}, E_{22}, \dots, E_{nn}$.
- The remaining $n^2 - n$ matrices $E_{\ell k}$, $\ell \neq k$, come in pairs $(E_{\ell k}, E_{k\ell})$, one matrix being the transposed of the other. We order them in a way keeping those pairs together.

Then the matrix representing T in the basis \mathcal{B} is

Solution 2.

1. En posant $S = a^2 + b^2 + c^2$ et $\sigma = ab + bc + ac$, on a :

$$A^t A = \begin{pmatrix} S & \sigma & \sigma \\ \sigma & S & \sigma \\ \sigma & \sigma & S \end{pmatrix}.$$

2. Posons $\delta = \det(A)$. On a, par $L_k \leftarrow L_k - \sigma L_1$ pour $k = 2$ et 3 :

$$\begin{aligned} \det(A^t A) &= \delta^2 = \begin{vmatrix} 1 & \sigma & \sigma \\ \sigma & 1 & \sigma \\ \sigma & \sigma & 1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & \sigma & \sigma \\ 0 & 1 - \sigma^2 & \sigma - \sigma^2 \\ 0 & \sigma - \sigma^2 & 1 - \sigma^2 \end{vmatrix} \\ &= 2(\sigma - 1)^2(\sigma + 1/2) \end{aligned}$$

Or, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a :

$$|\sigma| \leq a^2 + b^2 + c^2 = 1$$

donc $\sigma \in [-1, 1]$. Notons, pour tout réel x ,

Solution 3.

Notons $S = C_1 + \dots + C_n$. Ainsi

$$\begin{aligned} \det(M) &= \det(S - C_1, S - C_2, \dots, S - C_n) \\ &= \det((n-1)S, S - C_2, \dots, S - C_n). \end{aligned}$$

La dernière égalité s'obtient en ajoutant à la première colonne toutes les autres ce qui ne change pas le déterminant. On poursuit de la même manière :

$$\begin{pmatrix} \mathbb{1}_n & & & \\ & \begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n^2}(\mathbb{K}).$$

There are $\frac{n(n-1)}{2}$ blocks of the form $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Therefore

$$\begin{aligned} \det T &= \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}^{n(n-1)/2} = (-1)^{n(n-1)/2} \\ &= \begin{cases} -1 & \text{if } n \equiv 2 \text{ or } 3 \pmod{4} \\ 1 & \text{if } n \equiv 0 \text{ or } 1 \pmod{4}. \end{cases} \end{aligned}$$

$$P(x) = 2(x-1)^2(x+1/2) = 2x^3 - 3x^2 + 1.$$

Comme

$$P'(x) = 6x(x-1),$$

la fonction P est croissante sur $[-1, 0]$ et décroissante sur $[0, 1]$. Comme

$$P(-1) = -4, \quad P(0) = 1 \quad \text{et} \quad P(1) = 0$$

et $P(\sigma) = \delta^2 \geq 0$, on en déduit que

$$P(\sigma) \in [0, 1]$$

et donc que

$$|\delta| = \sqrt{P(\sigma)} \in [0, 1].$$

Solution géométrique (sans calcul) :

On sait que $|\det(A)|$ est le volume du parallélépipède formé par les trois vecteurs (a, b, c) , (b, c, a) et (c, a, b) . Ces trois vecteurs étant de norme 1, le volume vaut au plus A .

$$\begin{aligned} \det(M) &= (n-1) \det(S, S - C_2, \dots, S - C_n) \\ &\quad \text{(soustraire la 1ère colonne des autres)} \\ &= (n-1) \det(S, -C_2, \dots, -C_n) \\ &\quad \text{(ajouter les autres colonnes à la 1ère)} \\ &= (n-1) \det(C_1, -C_2, \dots, -C_n) \\ &= (n-1)(-1)^{n-1} \det(A). \end{aligned}$$

