

**Exercice 1.**

Pour deux entiers naturels  $n$  et  $k \geq 1$ , on note  $r_k(n)$  le reste de la division euclidienne de  $n$  par  $k$ . Etudier la convergence de la suite de terme général

$$u_n = \frac{r_1(n) + r_2(n) + \dots + r_n(n)}{n^2}.$$

**Exercice 2.**

Le but de cet exercice est d'apprendre à calculer des intégrales du type

$$\int \frac{px + q}{ax^2 + bx + c} dx \quad \text{et} \quad \int \frac{px + q}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx,$$

où  $a, b, c, p, q \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$ .

1. Expliquer comment on met le polynôme de second degré  $f(x) = ax^2 + bx + c$  en forme canonique  $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ .

2. Soit  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ . Calculer

$$\int \frac{dx}{a(x - \alpha)^2 + \beta} \quad \text{et} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{a(x - \alpha)^2 + \beta}}.$$

(Indication : Selon les signes de  $a$  et  $\beta$  se ramener aux dérivées des réciproques des fonctions hyperboliques ou trigonométriques.)

3. En se ramenant à la question précédente calculer

$$\int \frac{dx}{4x^2 - 8x + 7}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{-4x^2 + 8x + 5}},$$

$$\int \frac{dx}{4x^2 + 8x + 3}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{9x^2 + 36x + 28}}.$$

4. Calculer

$$\int \frac{x dx}{4x^2 + 16x + 17} \quad \text{et} \quad \int \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 - 2x + 3}} dx.$$

(Indication : Séparer de manière intelligente la fraction en une somme de deux fractions.)

**Exercice 3.**

1. Calculer  $\int_0^{7/4} \frac{dx}{\sqrt{-4x^2 + 8x + 5}}$ .

2. Déterminer la valeur de  $\int_0^\pi (\cos x)^3 dx$ .

3. Calculer  $\int_1^2 \frac{x^2 - 2}{x^3 + 3x^2 + 2x} dx$ . (Indication : Factoriser le dénominateur et décomposer en éléments simples.)

**Exercice 4.**

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue  $T$ -périodique telle que  $\int_0^T f(t) dt = 0$ . Montrer que :

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \int_a^b f(\lambda t) dt \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} 0.$$

Que devient le résultat si  $\int_0^T f(t) dt \neq 0$  ?

**Exercice 5.**

Soit  $f$  continue de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  tels que

$$\forall k \in \{0, \dots, n\}, \int_0^1 f(u) u^k du = 0.$$

Montrer que  $f$  admet au moins  $n + 1$  zéros distincts dans  $]0, 1[$ .

**Exercice 6.**

Soit  $f$  continue sur  $[0, \pi]$  telle que

$$\int_0^\pi f(u) \cos(u) du = \int_0^\pi f(u) \sin(u) du = 0,$$

montrer que  $f$  s'annule au moins deux fois sur  $]0, \pi[$ .

**Exercice 7.**

Soit  $f$  une fonction dérivable, strictement croissante et surjective de  $\mathbb{R}^+$  dans lui-même.

1. Si  $g$  est la fonction réciproque de  $f$ , montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}^+$ , on a l'inégalité,

$$xf(x) = \int_0^x f(t) dt + \int_0^{f(x)} g(s) ds.$$

2. Pour  $x$  et  $y$  dans  $\mathbb{R}^+$ , prouver l'inégalité,

$$xy \leq \int_0^x f(t) dt + \int_0^y g(s) ds.$$

3. Étudier le cas d'égalité.

4. En déduire que pour  $p > 1$ ,  $x \geq 0$  et  $y \geq 0$ , on a, en posant  $q = \frac{p}{p-1}$ , l'inégalité,

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}.$$

### 1. Solutions

**Solution 1.**

On note  $[t]$  la partie entière du réel  $t$  et

$$u_n = \frac{1}{n^2}(r_1 + r_2 + \dots + r_n).$$

Il est facile de voir que  $[n/k]$  est le quotient de la division euclidienne de  $n$  par  $k$ . Nous avons donc  $r_k = n - [n/k]k$  et

$$u_n = 1 - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n [n/k]k/n.$$

On reconnaît la somme de Riemann de la fonction

$$t \mapsto [1/t]t$$

sur le segment  $[0, 1]$ . Comme cette fonction est Riemann-intégrable sur  $[0, 1]$ , la suite  $(u_n)_{n \geq 1}$  est convergente de limite  $1 - \int_0^1 [1/t]t dt$ .

**Solution 2.**

1. On calcule

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) - \frac{b^2}{4a} + c = a \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

La courbe de  $f$  est donc une parabole de sommet  $(\alpha, \beta) = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$ . D'ailleurs on retrouve ainsi la formule pour les racines d'une équation de second degré.

$$f(x) = 0 \iff a \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a} \iff x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

2. On distingue les cas suivants.

►  $a > 0, \beta > 0$ .

$$\int \frac{dx}{a(x - \alpha)^2 + \beta} = \frac{1}{\beta} \int \frac{dx}{\left(\sqrt{\frac{a}{\beta}}(x - \alpha)\right)^2 + 1} = \frac{1}{\sqrt{a\beta}} \arctan\left(\sqrt{\frac{a}{\beta}}(x - \alpha)\right) + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a(x - \alpha)^2 + \beta}} = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \int \frac{dx}{\sqrt{\left(\sqrt{\frac{a}{\beta}}(x - \alpha)\right)^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \operatorname{argsh}\left(\sqrt{\frac{a}{\beta}}(x - \alpha)\right) + C$$

►  $a < 0, \beta < 0$ . Pour la première intégrale on factorise  $-1$  pour se ramener au cas ci-dessus. La deuxième intégrale n'a pas de sens car l'expression sous la racine est partout négative.

►  $a > 0, \beta < 0$ .

$$\int \frac{dx}{a(x - \alpha)^2 + \beta} = \frac{1}{-\beta} \int \frac{dx}{\left(\sqrt{\frac{a}{-\beta}}(x - \alpha)\right)^2 - 1} = \frac{1}{\sqrt{-a\beta}} \operatorname{argth}\left(\sqrt{\frac{a}{-\beta}}(x - \alpha)\right) + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a(x - \alpha)^2 + \beta}} = \frac{1}{\sqrt{-\beta}} \int \frac{dx}{\sqrt{\left(\sqrt{\frac{a}{-\beta}}(x - \alpha)\right)^2 - 1}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \operatorname{argch}\left(\sqrt{\frac{a}{-\beta}}(x - \alpha)\right) + C$$

Rappelons que  $\operatorname{argth}(t) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right)$  pour  $|t| < 1$ . On prendra  $\frac{1}{2} \ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|$  sur  $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ .

►  $a < 0, \beta > 0$ . Pour la première intégrale on factorise  $-1$  pour se ramener au cas ci-dessus. Pour la deuxième intégrale on trouve

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\beta + a(x - \alpha)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \int \frac{dx}{\sqrt{1 - \left(\sqrt{\frac{-a}{\beta}}(x - \alpha)\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{-a}} \arcsin\left(\sqrt{\frac{-a}{\beta}}(x - \alpha)\right) + C$$

3. Il faut mettre le polynôme de second degré  $f$  sous forme canonique. Le plus rapide est de remarquer que l'abscisse  $\alpha$  est déterminée par  $f'(\alpha) = 0$  et que  $\beta = f(\alpha)$ .

Par exemple, si  $f(x) = 4x^2 - 8x + 7$  alors  $f'(x) = 8x - 8$  et  $\alpha = 1$ , puis  $\beta = 1$ .

$$\int \frac{dx}{4x^2 - 8x + 7} = \int \frac{dx}{4(x-1)^2 + 1} = \int \frac{dx}{(2x-2)^2 + 1} = \frac{1}{2} \arctan(2x-2) + C$$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{4x^2 + 8x + 3} &= \int \frac{dx}{4(x+1)^2 - 1} = \frac{1}{2} \int \left( \frac{1}{2(x+1)-1} - \frac{1}{2(x+1)+1} \right) dx \\ &= \frac{1}{4} (\ln |2x+1| - \ln |2x+3|) + C \end{aligned}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-4x^2 + 8x + 5}} = \int \frac{dx}{\sqrt{9 - 4(x-1)^2}} = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{\sqrt{1 - \left(\frac{2}{3}(x-1)\right)^2}} = \frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{2}{3}(x-1)\right) + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2 + 36x + 28}} = \int \frac{dx}{\sqrt{9(x+2)^2 - 8}} = \frac{1}{\sqrt{8}} \int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{3}{\sqrt{8}}(x+2)\right)^2 - 1}} = \frac{1}{3} \operatorname{argch}\left(\frac{3}{2\sqrt{2}}(x+2)\right) + C$$

► La dérivée de  $4x^2 + 16x + 17$  est  $8x + 16$ . C'est pourquoi nous allons faire apparaître ce terme au numérateur pour reconnaître la dérivée d'une fonction composée  $\ln |u(x)|$ .

$$\begin{aligned} \int \frac{x dx}{4x^2 + 16x + 17} &= \frac{1}{8} \int \frac{(8x + 16 - 16)}{4x^2 + 16x + 17} dx \\ &= \frac{1}{8} \int \frac{8x + 16}{4x^2 + 16x + 17} dx - \frac{1}{8} \int \frac{16}{4x^2 + 16x + 17} dx \\ &= \frac{1}{8} \ln |4x^2 + 16x + 17| - 2 \int \frac{dx}{4(x+2)^2 + 1} \\ &= \frac{1}{8} \ln(4x^2 + 16x + 17) - \arctan(2x + 4) + C. \end{aligned}$$

► Même principe, cette fois pour retrouver la dérivée d'une fonction composée  $\sqrt{u(x)}$ .

$$\begin{aligned} \int \frac{x+1}{\sqrt{x^2 - 2x + 3}} dx &= \int \frac{\frac{1}{2}(2x-2) + 2}{\sqrt{x^2 - 2x + 3}} dx \\ &= \int \frac{2x-2}{2\sqrt{x^2 - 2x + 3}} dx + 2 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 2x + 3}} \\ &= \sqrt{x^2 - 2x + 3} + 2 \int \frac{dx}{\sqrt{(x-1)^2 + 2}} \\ &= \sqrt{x^2 - 2x + 3} + \frac{2}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{x-1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1}} \\ &= \sqrt{x^2 - 2x + 3} + 2 \operatorname{argsh}\left(\frac{x-1}{\sqrt{2}}\right) + C. \end{aligned}$$

**Solution 3.**

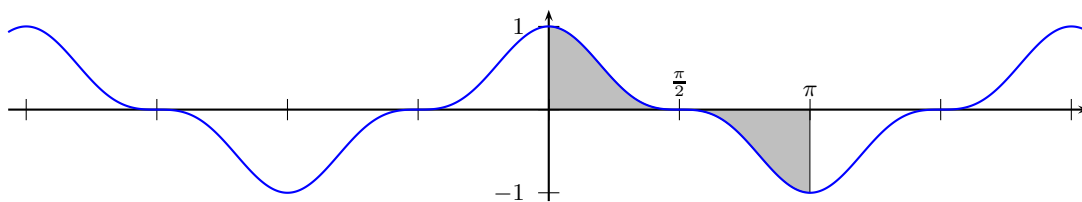
1. On revient à la forme canonique d'un polynôme de second degré.

$$\int_0^{7/4} \frac{dx}{\sqrt{-4x^2 + 8x + 5}} = \int_0^{7/4} \frac{dx}{\sqrt{9 - 4(x-1)^2}} = \frac{1}{3} \int_0^{7/4} \frac{dx}{\sqrt{1 - (\frac{2}{3}(x-1))^2}}$$

$$= \frac{1}{2} \left[ \arcsin \left( \frac{2}{3}(x-1) \right) \right]_0^{7/4} = \frac{\pi}{12} + \frac{1}{2} \arcsin \frac{2}{3}.$$

2. *Solution sans calcul* : Posons  $f(x) = (\cos x)^3$ . Comme pour tout  $x \in \mathbb{R}$  on a  $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = -\cos(\frac{\pi}{2} + x)$ , on a également  $f(\frac{\pi}{2} - x) = -f(\frac{\pi}{2} + x)$ . Autrement dit, la courbe de  $f$  est symétrique par rapport au point de coordonnées  $(\frac{\pi}{2}, 0)$ . Cela implique que

$$\int_0^{\pi/2} f(x)dx = - \int_{\pi/2}^{\pi} f(x)dx, \quad \text{et donc} \quad \int_0^{\pi} f(x)dx = 0.$$



*Solution pour les aveugles* : Comme

$$(\cos x)^3 = \left( \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^3 = \frac{1}{8}(e^{3ix} + 3e^{ix} + 3e^{-ix} + e^{-3ix}) = \frac{1}{8}(2 \cos(3x) + 6 \cos x) = \frac{1}{4}(\cos(3x) + 3 \cos x).$$

on trouve

$$\int_0^{\pi} (\cos x)^3 dx = \left[ \frac{1}{12} \sin(3x) + 3 \sin x \right]_0^{\pi} = 0.$$

*Troisième solution* :

$$\int_0^{\pi} (\cos x)^3 dx = \int_0^{\pi} (1 - (\sin x)^2) \cos x dx = \int_0^{\pi} (\cos x - (\sin x)^2 \cos x) dx = \left[ \sin(x) + \frac{1}{3}(\sin x)^3 \right]_0^{\pi} = 0.$$

3. D'après le théorème de décomposition en éléments simples il existe des réels  $a, b, c$  tels que

$$\frac{x^2 - 2}{x(x+1)(x+2)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x+2}.$$

On obtient  $a = -1$  et  $b = c = 1$ . Donc

$$\int_1^2 \frac{x^2 - 2}{x^3 + 3x^2 + 2x} dx = \left[ -\ln|x| + \ln|x+1| + \ln|x+2| \right]_1^2 = 0.$$

**Solution 4.**

Posons  $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ . Alors

$$F(x+T) = \int_0^{x+T} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt + \int_T^{T+x} f(t)dt$$

Par hypothèse,  $\int_0^T f(t)dt = 0$  et  $\int_T^{T+x} f(t)dt = \int_0^x f(t)dt$  par périodicité de  $f$ . Ainsi  $F$  est aussi  $T$ -périodique.

Pour  $\lambda > 0$ ,

$$\int_a^b f(\lambda t)dt = \frac{1}{\lambda} \int_{\lambda a}^{\lambda b} f(u)du = \frac{1}{\lambda}(F(\lambda b) - F(\lambda a))$$

par le changement de variable  $u = \lambda t$ . Comme  $F$  est continue et périodique, elle est bornée sur  $\mathbb{R}$  : il existe  $M \in \mathbb{R}_+$  tel que  $\forall x \in \mathbb{R}, |F(x)| \leq M$ . Par conséquent,

$$\left| \int_a^b f(\lambda t)dt \right| = \frac{1}{\lambda} |F(\lambda b) - F(\lambda a)| \leq \frac{2M}{\lambda} \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} 0.$$

Si  $C = \int_0^T f(t)dt \neq 0$ , alors posons  $g(t) = f(t) - \frac{C}{T}$  de telle sorte que  $\int_0^T g(t)dt = 0$ .

$$\int_a^b f(\lambda t)dt = \int_a^b g(\lambda t)dt + \int_a^b \frac{C}{T}dt$$

D'après ce qui précède,  $\int_a^b g(\lambda t)dt \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} 0$ . Donc

$$\int_a^b f(\lambda t)dt \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b \frac{C}{T}dt = \frac{C(b-a)}{T}.$$

**Solution 5.**

Commençons par remarquer que la linéarité de l'intégrale entraîne que

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \int_0^1 f(u)P(u) = 0.$$

Raisonnons par l'absurde en supposant que la fonction  $f$  admet  $p \leq n$  zéro(s) sur  $]0, 1[$ . Quitte à rejeter certains zéros, on peut considérer que  $f$  change de signe en chacune de ces  $p$  zéro(s).

► si  $p = 0$ , on aurait  $f < 0$  ou  $f > 0$  sur  $]0, 1[$  par continuité de  $f$  ce qui entraînerait

$$\int_0^1 f(u)du \neq 0$$

ce qui est absurde.

► si  $p \geq 1$ . Notons  $x_1 < x_2 < \dots < x_p$  les zéros de  $f$  sur  $]0, 1[$  où  $f$  change de signe. Il est alors clair que

$$u \in [0, 1] \mapsto g(u) = f(u) \prod_{k=1}^p (u - x_k)$$

est continue non nulle de signe constant sur  $[0, 1]$  et donc

$$\int_0^1 g(u)du \neq 0$$

ce qui est absurde car

$$\int_0^1 g(u)du = 0$$

puisque

$$\prod_{k=1}^p (X - x_k) \in \mathbb{R}_n[X].$$

La fonction  $f$  admet au moins  $n + 1$  zéros distincts dans  $]0, 1[$ .

**Solution 6.**

Raisonnons l'absurde en supposant que  $f$  s'annule au plus une fois sur  $]0, \pi[$ . Si  $f$  ne s'annulait pas, elle conserverait un signe constant sur l'intervalle  $]0, \pi[$  en tant que fonction continue. Quitte à considérer  $-f$  au lieu de  $f$ , on peut supposer ce signe positif. On aurait alors

$$\int_0^\pi f(u) \sin(u)du = 0$$

et  $f \times \sin$  positive continue donc nulle ce qui est absurde car entraînerait  $f(t) = 0$  sur  $]0, \pi[$ . Ainsi  $f$  s'annule en un point  $\alpha$  de  $]0, \pi[$ . En reprenant les arguments précédents, on peut même dire que  $f$  change de signe en  $\alpha$ . Quitte à considérer  $-f$  au lieu de  $f$ , on peut supposer  $f$  positive sur  $[0, \alpha]$  puis négative sur  $[\alpha, \pi]$ . On aurait alors

$$\int_0^\pi f(t) \sin(\alpha - t)dt = \sin(\alpha) \int_0^\pi f(t) \cos(t)dt - \cos(\alpha) \int_0^\pi f(t) \sin(t)dt = 0$$

avec

$$\forall t \in [0, \pi], g(t) = f(t) \sin(\alpha - t) \geq 0$$

et  $g$  continue d'où  $g = 0$  et donc  $f(t) = 0$  sur  $[0, \pi] \setminus \{\alpha\}$  ce qui est absurde.

**Solution 7.**

1. Notons

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, F(x) = \int_0^x f(t)dt + \int_0^{f(x)} g(s)ds.$$

Nous avons que  $F$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+$  car  $f$  est dérivable et  $g$  continue (en tant que bijection réciproque de la bijection continue  $f$ ), et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, F'(x) = f(x) + g(f(x))f'(x) = f(x) + xf'(x),$$

c'est-à-dire que les fonctions  $F$  et  $x \mapsto xf(x)$  ont la même dérivée; comme elles coïncident en 0, nous en déduisons l'identité demandée.

2. D'après la première question, nous avons

$$\int_0^x f(t)dt + \int_0^y g(s)ds = xf(x) + \int_{f(x)}^y g(s)ds.$$

Si  $f(x) \leq y$ , alors pour tout  $s \in [f(x), y]$ , nous avons  $x = g(f(x)) \leq g(s)$ . En intégrant cette inégalité membre à membre, on obtient

$$x(y - f(x)) \leq \int_{f(x)}^y g(s)ds,$$

c'est-à-dire

$$xy \leq xf(x) + \int_{f(x)}^y g(s)ds = \int_0^x f(t)dt + \int_0^y g(s)ds.$$

Dans le cas  $y \leq f(x)$ , une preuve semblable conduit à l'inégalité demandée.

3. On applique l'inégalité de la question 2. à la fonction  $f(t) = t^{p-1}$ .