

Exercice 1.

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $E = \mathbb{R}^4$ et

$$u_1 = (\alpha, -\alpha, \beta, -\beta), \quad u_2 = (\alpha, \alpha, \beta, \beta), \quad u_3 = (\beta, \beta, \alpha, \alpha)$$

$$u_4 = (\beta, -\beta, \alpha, \alpha) \quad \text{et} \quad u_5 = (1, 1, 1, 1).$$

Déterminer le rang de la famille $(u_k)_{1 \leq k \leq 5}$.

Exercice 2.

Soient E un espace vectoriel de dimension 4 et de base (e_1, e_2, e_3, e_4) , $\alpha \in \mathbb{R}$ et (f_1, f_2, f_3, f_4) la famille de vecteurs définie par,

$$f_1 = e_2 - e_3 - \alpha e_4, \quad f_2 = e_1 + e_2,$$

$$f_3 = \alpha e_1 + e_2 - e_3 \quad \text{et} \quad f_4 = e_4 + (\alpha - 1)e_1 - \alpha e_2 + \alpha e_3.$$

Discuter le rang de cette famille en fonction de α .

Exercice 3.

Considérons pour $0 < p < 1$ la matrice

$$M = \frac{1}{1+p} \begin{pmatrix} 1 & p \\ p & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Etude des puissances de M .

1.a. Vérifier que

$$\forall A \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R}), \quad A^2 - \text{tr}(A)A + \det(A)\mathbb{I}_2 = \mathbb{O}_2.$$

1.b. En déduire l'expression de M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1.c. Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} M^n$.

2. Une application.

2.a. Une bouteille de vin contient un litre de vin, et une bouteille de bière un litre de bière. On verse une partie de la première dans la seconde. Puis une partie de la seconde dans la première, de sorte qu'à l'issue de cette opération chacune des deux bouteilles contient un litre de mélange. La proportion de bière dans la bouteille de vin est-elle plus petite, égale ou plus grande que la proportion de vin dans la bouteille de bière ?

2.b. On itère n fois l'opération décrite ci-dessus, en transvasant toujours la même quantité. Calculer la proportion de bière dans chaque bouteille lorsque n tend vers ∞ .

Exercice 4.

Soient $n \geq 1$ et A, B deux matrices de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB = A + B$. Montrer que A et B commutent.

Exercice 5.

Soit $n \geq 1$.

1. Soient $1 \leq i, j \leq n$ et M une matrice de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ tels que $ME_{i,j} = E_{i,j}M$. Que dire des coefficients de M ?

2. Déterminer les matrices de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ qui commutent avec toutes les matrices de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 6.

Soit $A \in \mathfrak{M}_{np}(\mathbb{K})$.

► Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes.

1. $\text{rg}(A) = p$.

2. Les colonnes de A forment une famille libre.

3. Les lignes de A forment une famille génératrice de \mathbb{K}^p .

4. A est inversible à gauche : $\exists B \in \mathfrak{M}_{pn}(\mathbb{K}), BA = \mathbb{I}_p$.

► Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes.

1. $\text{rg}(A) = n$.

2. Les lignes de A forment une famille libre.

3. Les colonnes de A forment une famille génératrice de \mathbb{K}^n .

4. A est inversible à gauche : $\exists C \in \mathfrak{M}_{pn}(\mathbb{K}), AC = \mathbb{I}_n$.

Exercice 7.

Existe-t-il deux matrices de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ telles que

$$AB - BA = \mathbb{I}_n ?$$

Exercice 8.

Soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 défini par

$$(x, y, z) \mapsto (2x - y, -x + y, x - z).$$

Prouver que f est un isomorphisme de \mathbb{R}^3 et expliciter son isomorphisme réciproque f^{-1} .

1. Solutions

Solution 1.

Notons S le système $(u_k)_{1 \leq k \leq 5}$.

$$S \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \alpha & \beta & \beta \\ \beta & \beta & \alpha & \alpha \\ \alpha - \alpha & \beta - \beta & & \\ \beta - \beta & \alpha & \alpha & \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha - \beta & \alpha - \beta \\ 0 & 0 & \beta - \alpha & \beta - \alpha \\ 0 & -2\alpha & \beta - \alpha & -\beta - \alpha \\ 0 & -2\beta & \alpha - \beta & \alpha - \beta \end{bmatrix}$$

par $L_2 \leftarrow L_2 - \alpha L_1, L_3 \leftarrow L_3 - \beta L_1, L_4 \leftarrow L_4 - \alpha L_1$ et $L_5 \leftarrow L_5 - \beta L_1$.

$$S \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha - \beta & \alpha - \beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2\alpha & \beta - \alpha & -\beta - \alpha \\ 0 & -2\beta & \alpha - \beta & \alpha - \beta \end{bmatrix}$$

Solution 2.

Déterminons le rang de la famille en utilisant la présentation matricielle,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & -1 & 0 \\ \alpha - 1 & -\alpha & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -\alpha \end{bmatrix}$$

et par les opérations, $L_3 \leftarrow L_2 - \alpha L_1, L_4 \leftarrow L_3 - (\alpha - 1)L_1, L_2 \leftarrow L_4$,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \alpha \\ 0 & 1 - \alpha & -1 & 0 \\ 0 & 1 - 2\alpha & \alpha & 1 \end{bmatrix}$$

puis $L_3 \leftarrow L_2 + (\alpha - 1)L_1, L_4 \leftarrow L_3 + (2\alpha - 1)L_2$,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \alpha \\ 0 & 0 & -\alpha & -\alpha(\alpha - 1) \\ 0 & 0 & 1 - \alpha & -2\alpha^2 + \alpha + 1 \end{bmatrix}$$

► Si $\alpha = 0$, le système s'écrit

Solution 3.

1. Etude des puissances de M .

1.a. Notons $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{C})$. D'après la formule définissant le produit matriciel,

$$A^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{pmatrix}.$$

Or,

$$(a + d)A = \begin{pmatrix} a^2 + ad & ab + bd \\ ac + cd & ad + d^2 \end{pmatrix}.$$

On a donc

$$A^2 + (a + d)A + (ad - bc)I_2 = 0,$$

et comme $\text{tr}(A) = a + d$ et $\det(A) = ad - bc$, on a

$$A^2 - \text{tr}(A)A + \det(A)I_2 = \mathbf{O}_2.$$

par $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$,

$$S \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha - \beta & \alpha - \beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2\alpha & 0 & -2\beta \\ 0 & -2\beta & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

par $L_4 \leftarrow L_4 + L_2, L_5 \leftarrow L_5 - L_2$.

- Si $\beta = \alpha = 0$, S est de rang 1.
- Si $\beta = 0$ et $\alpha \neq 0$, S est de rang 3.
- Si $\beta \neq 0$ et $\alpha \neq \beta$, S est de rang 4.
- Si $\beta \neq 0$ et $\alpha = \beta$, S est de rang 3.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

et le système initial est de rang 3.

► Si $\alpha \neq 0$,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \alpha \\ 0 & 0 & -1 & 1 - \alpha \\ 0 & 0 & 1 - \alpha & -2\alpha^2 + \alpha + 1 \end{bmatrix}$$

et par l'opération $L_4 \leftarrow L_4 + (1 - \alpha)L_3$,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \alpha \\ 0 & 0 & -1 & 1 - \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 2 - \alpha - \alpha^2 \end{bmatrix}$$

Or, $2 - \alpha - \alpha^2 = (1 - \alpha)(2 + \alpha)$.

► Si $\alpha = 1$ ou $\alpha = -2$, le système initial est de rang 3, sinon de rang 4.

1.b. D'après ce qui précède, on a $P(A) = \mathbb{O}_2$ où $A = (p+1)M$ et

$$P(X) = X^2 - 2X + 1 - p^2 = (X - p - 1)(X + p - 1).$$

Ecrivons la division euclidienne de X^n par P : il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$, a_n et b_n dans \mathbb{R} tels que

$$X^n = P(X)Q(X) + a_nX + b_n.$$

Ainsi $(1 \pm p)^n = a_n(1 \pm p) + b_n$. On en déduit que

$$a_n = \frac{(1+p)^n - (1-p)^n}{2p}, \quad b_n = \frac{(1+p)(1-p)^n - (1-p)(1+p)^n}{2p}$$

puis $A^n = a_nA + b_n\mathbb{I}_2$ et donc

$$M^n = \frac{a_nA + b_n\mathbb{I}_2}{(p+1)^n}$$

1.c. Comme $\left| \frac{1-p}{1+p} \right| < 1$, la suite $(M^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers

$$\frac{1}{2p}A + \frac{p-1}{2p}\mathbb{I}_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Une application.

2.a. Les deux proportions sont égales. En effet, on peut raisonner sans calcul : après l'opération, la partie de bière dans la bouteille de vin prend un certain volume V qui avant était occupé par du vin. Or, lors de l'opération on ne perd pas de liquide et on a encore la même quantité dans chaque bouteille. Donc c'est précisément ce volume V de vin qui se trouve maintenant dans la bouteille de bière.

2.b. Soit a_n (resp. b_n) la proportion de bière dans la bouteille de vin (resp. de bière) après la n -ième opération. Evidemment, au départ, $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$. Détaillons la $(n+1)$ -ième opération. En transvasant une proportion p , $0 < 1 < p$, de la bouteille de vin dans la bouteille de bière, on obtient encore la proportion a_n dans la bouteille de vin et la proportion $\frac{1}{1+p}(b_n + pa_n)$ dans la bouteille de bière. En retransvasant on obtient alors

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= (1-p)a_n + \frac{p}{1+p}(b_n + pa_n) = \frac{1}{1+p}(a_n + pb_n), \\ b_{n+1} &= \frac{1}{1+p}(b_n + pa_n). \end{aligned}$$

En écriture matricielle avec la matrice A de la partie (a), cela devient :

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}.$$

Donc avec le résultat de (a) on trouve $\lim a_n = \lim b_n = 1/2$.

Solution 4.

On remarque que $A + B = AB$ équivaut à

$$(\mathbb{I}_n - A)(\mathbb{I}_n - B) = \mathbb{I}_n.$$

Ainsi $\mathbb{I}_n - A$ est inversible d'inverse $\mathbb{I}_n - B$ d'où

$$(\mathbb{I}_n - B)(\mathbb{I}_n - A) = \mathbb{I}_n,$$

et donc $A + B = BA$ puis $AB = BA = A + B$.

Solution 5.

1. D'après la définition du produit matriciel, $ME_{i,j}$ est la matrice dont toutes les colonnes sont nulles sauf la j -ième qui vaut la i -ième colonne de M et $E_{i,j}M$ est la matrice dont toutes les lignes sont nulles sauf la i -ième qui vaut la j -ième ligne de M . L'égalité de ces deux matrices est donc équivalente aux égalités suivantes,

$$m_{i,i} = m_{j,j}$$

et

$$\forall k \neq i \text{ et } \forall \ell \neq j, \quad m_{i,k} = m_{j,\ell} = 0.$$

2. Soit M une matrice commutant avec toutes les matrices de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. Elle particulier, puisque M commute alors en particulier avec les matrices de la base canonique $(E_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$, on peut appliquer les résultats de la question précédente : tous les coefficients diagonaux de M sont égaux et les autres sont nuls : M est donc de la forme $\lambda \mathbb{I}_n$. Réciproquement, il est clair que les matrices de cette forme commutent avec toutes les matrices de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

Solution 6.

► 1) ⇒ 2) Supposons que $\text{rg}(A) = p$. En particulier le sous-espace vectoriel $F \subset \mathbb{K}^n$ engendré par les colonnes de A est de dimension p . Et comme le nombre de ces colonnes est p , elles forment une base de F et en particulier une famille libre.

2) ⇒ 3) Supposons que les colonnes de A forment une famille libre. Donc $\text{rg}(A) = p$ et le sous-espace vectoriel $G \subset \mathbb{K}^p$ engendré par les lignes de A est de dimension p . D'où $G = \mathbb{K}^p$, et les lignes de A forment une famille génératrice de \mathbb{K}^p .

3) ⇒ 4) Supposons que les lignes A_1, \dots, A_n de A forment une famille génératrice de \mathbb{K}^p . Pour tout $\ell \in \llbracket 1, p \rrbracket$ notons e_ℓ la ℓ -ième ligne de la matrice identité \mathbb{I}_p . On peut écrire e_ℓ comme combinaison linéaire des lignes de A . Autrement dit, il existe $b_{\ell 1}, \dots, b_{\ell n} \in \mathbb{K}$ tels que

$$e_\ell = b_{\ell 1}A_1 + \dots + b_{\ell n}A_n, \quad \ell \in \llbracket 1, p \rrbracket.$$

Solution 7.

Raisonnons par l'absurde en supposant l'existence de deux matrices A, B telles que

$$AB - BA = \mathbb{I}_n.$$

On aurait alors

$$\text{tr}(AB - BA) = \text{tr}(\mathbb{I}_n) = n.$$

Solution 8.

► L'application f est clairement linéaire de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^3 .

► Pour tous $x, y, z, x', y', z' \in \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = (x', y', z')$ si et seulement si

$$\begin{cases} 2x - y &= x' \\ -x + y &= y' \\ x &- z = z' \end{cases}$$

Appliquons la méthode du pivot de Gauss sous sa forme matricielle

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & z' \\ -1 & 1 & 0 & y' \\ 2 & -1 & 0 & x' \end{array} \right]$$

par les opérations $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$

En écriture matricielle cela signifie $\mathbb{I}_p = BA$ avec $B = (b_{\ell k}) \in \mathfrak{M}_{pn}(\mathbb{K})$.

4) ⇒ 1) Supposons qu'il existe $B \in \mathfrak{M}_{pn}(\mathbb{K})$ tel que $BA = \mathbb{I}_p$. Alors les lignes de \mathbb{I}_p sont des combinaisons linéaires des lignes de A . Donc les lignes de A forment une famille génératrice de \mathbb{K}^p . Donc $\text{rg}(A) = p$.

► D'après le premier point nous avons pour la matrice transposée ${}^tA \in \mathfrak{M}_{pn}(\mathbb{K})$ les équivalences suivantes

1. $\text{rg}({}^tA) = n$.
2. Les colonnes de tA forment une famille libre.
3. Les lignes de tA forment une famille génératrice de \mathbb{K}^n .
4. A est inversible à gauche : $\exists B \in \mathfrak{M}_{np}(\mathbb{K}), B {}^tA = \mathbb{I}_n$.

En remarquant que $B {}^tA = \mathbb{I}_n$ équivaut à $A {}^tB = \mathbb{I}_n$ nous trouvons donc les équivalences demandées.

Or, d'après les propriétés de la trace,

$$\text{tr}(AB - BA) = \text{tr}(AB) - \text{tr}(BA) = 0.$$

Ainsi $0 = n \geq 1$, ce qui est absurde. L'équation n'a donc aucune solution dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & z' \\ 0 & 1 & -1 & y' + z' \\ 0 & -1 & 2 & x' - 2z' \end{array} \right]$$

puis $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & z' \\ 0 & 1 & -1 & y' + z' \\ 0 & 0 & 1 & x' + y' - z' \end{array} \right]$$

d'où,

$$\begin{cases} x = & x' + y' \\ y = & x' + 2y' \\ z = x' + y' - z' \end{cases}$$

ainsi f est un isomorphisme et f^{-1} est défini sur \mathbb{R}^3 par

$$(x, y, z) \mapsto (x + y, x + 2y, x + y - z).$$