

Exercice 1.

Let a_1, \dots, a_n and $p \geq 1$ be real numbers. Denote by $m(f_p)$ the set where the function

$$f_p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sum_{k=1}^n |x - a_k|^p$$

takes its minimum value. Show that if $p > 1$ then $m(f_p)$ consists of a single point. Find $m(f_2)$ and $m(f_1)$.

Exercice 2.

1. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe majorée. Prouver que f est constante.
2. Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe majorée. A-t-on la même conclusion qu'à la question 1. ?

Exercice 3.

Le but de l'exercice est de prouver qu'une fonction qui admet un développement limité à tout ordre n'est pas forcément dérivable à tout ordre.

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$x \mapsto \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) \sin\left(\exp\frac{1}{x^2}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1. Montrer que le développement limité de f en 0 est nul à tout ordre.
2. Montrer que f est dérivable mais pas continûment dérivable en 0.

Exercice 4.

On note f la fonction $\sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Prouver à l'aide des développements limités que la famille

$$(f, f \circ f, f \circ f \circ f)$$

est libre dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Exercice 5.

On pose pour tout $x \in]-1, 3[$, $f_0(x) = \sqrt{1+x}$ et

$$\forall n \geq 0, \quad f_{n+1}(x) = \sqrt{2 - f_n(x)}.$$

1. Prouver que les fonctions f_n sont bien définies.
2. Montrer que, pour tout entier naturel n , f_n admet un $DL_2(0)$ que l'on explicitera.

Exercice 6.

Déterminer les réels a et b tels que

$$f(x) = \cos(x) - \frac{1+ax^2}{1+bx^2}$$

soit, au voisinage de 0, un infiniment petit d'ordre le plus grand possible.

Exercice 7.

Chercher trois termes du développement asymptotique de la fonction f définie par

$$f(x) = \sqrt{x^2 + x}$$

au voisinage de $+\infty$.

1. Solutions

Solution 1.

We may change indices in such a way that $a_1 \leq \dots \leq a_n$. The function f_p is strictly decreasing on $] -\infty, a_1]$ and strictly increasing on $[a_n, \infty[$. Therefore, being a continuous function, it takes its minimum somewhere in the interval $[a_1, a_n]$.

► Consider the case $p > 1$. Suppose that there are two distinct points b, c where f_p takes its minimum value γ . But f_p is a strictly convex function (it is the sum of strictly convex functions) and so we get the contradiction

$$f_p\left(\frac{b+c}{2}\right) < \frac{f_p(b) + f_p(c)}{2} = \gamma. \quad \zeta$$

Thus $m(f_p)$ consists of a single point. In the special case $p = 2$, f_p is a polynomial of degree 2, and we resolve

$$f'_2(x) = 2 \sum_{k=1}^n (x - a_k) = 0.$$

Therefore $m(f_2)$ consists of the arithmetic mean value

$$\frac{a_1 + \dots + a_n}{n}.$$

Solution 2.

1. Raisonnons par l'absurde en supposant l'existence d'une corde du graphe de f de pente $p \neq 0$. Supposons $p > 0$. Si p correspond à la corde interceptant les points d'abscisses $x_1 < x_2$, par convexité de $f, \forall x > x_2$ on a,

$$\frac{f(x) - f(x_2)}{x - x_2} \geq p$$

et donc

$$f(x) \geq p(x - x_2) + f(x_2)$$

ainsi

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

ce qui absurde car f est majorée.

Supposons $p < 0$. Si p correspond à la corde interceptant les points d'abscisses $x_1 < x_2$, par convexité de $f, \forall x < x_1$ on a,

Solution 3.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Il s'agit de montrer que $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^n)$. Nous avons

$$\left| \frac{f(x)}{x^n} \right| \leq \frac{\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{|x|^n}$$

En posant $t = \frac{1}{|x|}$ nous trouvons

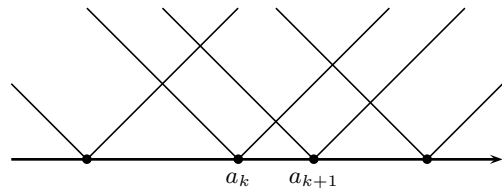
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{|x|^n} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^n}{\exp(t^2)} = 0,$$

ce qui permet de conclure.

2. Il est clair que f est dérivable sur \mathbb{R}^* et on calcule facilement

► Now consider the case $p = 1$. Clearly f_1 is convex but not strictly. For all $k = 1, \dots, n - 1$ the restriction $f_1|_{[a_k, a_{k+1}]}$ is an affine function $x \mapsto \alpha_k x + \beta_k$. It is easy to see that α_k is the difference between the « number of points left to a_{k+1} » and the « number of points left to a_{k+1} »,

$$\alpha_k = k - (n - k) = 2k - n.$$



Consequence : f_1 is decreasing on $[a_k, a_{k+1}]$ if $k < n/2$, increasing if $k > n/2$ and constant if $2k = n$. Therefore, $m(f_1)$ consists of the « central point » $a_{(n+1)/2}$ if n is uneven and of the « central interval » $[a_{n/2}, a_{n/2+1}]$ if n is even.

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq p$$

et donc

$$f(x) \geq p(x - x_1) + f(x_1)$$

ainsi

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

ce qui absurde car f est majorée.

On aboutit donc à une absurdité dans tous les cas.

2. La conclusion précédente n'est plus valable comme en témoigne l'exemple de la fonction

$$f : x \mapsto e^{-x}.$$

f est convexe car de classe \mathcal{C}^∞ et de dérivée seconde positive. Elle est bornée en valeur absolue par 1 sur $[0, +\infty[$ mais n'est pas constante !

$$f'(x) = \frac{2f(x)}{x^3} - \frac{2}{x^3} \cos\left(\exp\frac{1}{x^2}\right), \quad x \neq 0.$$

Nous savons déjà que le premier terme $\frac{2f(x)}{x^3}$ converge vers 0 lorsque x tend vers 0. Considérons la suite

$$x_k = \frac{1}{\sqrt{\ln(2k\pi)}}, \quad k \in \mathbb{N}^*.$$

Elle tend vers 0 et

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f'(x_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(-\frac{2}{x_k^3}\right) = -\lim_{k \rightarrow \infty} (\ln(2k\pi))^{\frac{3}{2}} = -\infty.$$

Donc f' n'est pas continue en 0.

Solution 4.

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$af(x) + b(f \circ f)(x) + c(f \circ f \circ f)(x) = 0.$$

Puisque $\sin(\mathbb{R}) = [-1, 1]$, on a donc, pour tout $y \in [-1, 1]$,

$$ay + b \sin(y) + c \sin(\sin(y)) = 0.$$

Effectuons un $DL_5(0)$ de cette expression. On a

$$\sin(y) \underset{0}{=} y - \frac{1}{6}y^3 + \frac{1}{120}y^5 + o(y^5).$$

Déterminons le $DL_5(0)$ de $\sin \circ \sin$ par composition. Posons

$$y = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5.$$

Solution 5.

1. Prouvons par récurrence la propriété $HR(n)$ suivante : f_n est définie sur $] -1, 3[$ à valeurs dans $]0, 2[$.

► $HR(0)$ est banale d'après l'expression de f_0 .

► Supposons f_n définie sur $] -1, 3[$ à valeurs dans $]0, 2[$. Alors f_{n+1} est bien définie sur $] -1, 3[$ et sur cet intervalle,

$$f_{n+1}(x) = \sqrt{2 - f_n(x)} \in]0, \sqrt{2}[\subset]0, 2[.$$

$HR(n+1)$ est donc vérifiée.

► Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est donc définie sur $] -1, 3[$ à valeurs dans $]0, 2[$ d'après le principe de récurrence.

2. Prouvons par récurrence que f_n admet un $DL_2(0)$ et que $f_n(0) = 1$.

► On a au voisinage de 0,

$$f_0 \underset{0}{=} 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2),$$

$HR(0)$ est donc vraie.

► Supposons l'existence de $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ tels que,

$$f_n(x) \underset{0}{=} 1 + a_n x + b_n x^2 + o(x^2).$$

On a au voisinage de 0,

$$\sqrt{1+u} \underset{0}{=} 1 + \frac{u}{2} - \frac{u^2}{8} + o(u^2).$$

Posons

$$u = -a_n x - b_n x^2.$$

y	x	0	$-\frac{1}{6}x^3$	0	$\frac{1}{120}x^5$
$-\frac{1}{6}y^3$	0	0	$-\frac{1}{6}x^3$	0	$\frac{1}{12}x^5$
$\frac{1}{120}y^5$	0	0	0	0	$\frac{1}{120}x^5$
$\sin \circ \sin$	x	0	$-\frac{1}{3}x^3$	0	$\frac{1}{10}x^5$

Ainsi ,

$$(\sin \circ \sin)(y) \underset{0}{=} y - \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{10}y^5 + o(y^5).$$

On a donc, au voisinage de 0,

$$(a + b + c)y - \frac{b + 2c}{6}y^3 + \frac{b + 12c}{120}y^5 + o(y^5) = 0,$$

d'où, par unicité de la partie principale d'un DL ,

$$a + b + c = b + 2c = b + 12c = 0,$$

ie $a = b = c = 0$. La famille étudiée est donc libre.

$\frac{u}{2}$	$-\frac{a_n}{2}x$	$-\frac{b_n}{2}x^2$
$-\frac{1}{8}u^2$		$-\frac{a_n^2}{8}x^2$
f_{n+1}	$-\frac{a_n x}{2}$	$-\frac{4b_n + a_n^2}{8}x^2$

En posant

$$a_{n+1} = -\frac{1}{2}a_n$$

et

$$b_{n+1} = -\frac{4b_n + a_n^2}{8} = -\frac{1}{2}b_n + a_n^2,$$

on a

$$f_n(x) \underset{0}{=} 1 + a_{n+1}x + b_{n+1}x^2 + o(x^2).$$

Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$c_n = (-1)^n 2^n b_n.$$

On a alors, $a_n = \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}$ et $c_{n+1} - c_n = \frac{1}{16} \frac{(-1)^n}{2^n}$, d'après la formule de la série géométrique, on a donc

$$c_n = -\frac{1}{12} + \frac{(-1)^{n+1}}{24 \cdot 2^n},$$

puis

$$b_n = -\frac{1}{24 \cdot 4^n} + \frac{(-1)^{n+1}}{12 \cdot 2^n}.$$

Solution 6.

On a

$$\cos(x) \underset{0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$

et

$$\begin{aligned} \frac{1+ax^2}{1+bx^2} &\underset{0}{=} (1+ax^2)(1-bx^2+b^2x^4-b^3x^6+o(x^6)) \\ &\underset{0}{=} 1+(a-b)x^2+(b^2-ab)x^4+o(x^4) \end{aligned}$$

d'où

$$f(x) \underset{0}{=} (-1/2+a-b)x^2+(1/24+b^2-ab)x^4+o(x^4).$$

Solution 7.

Il est possible d'obtenir certains développements asymptotiques au voisinage de $+\infty$ ou de $-\infty$ en posant $x = 1/u$, ce qui ramène le problème à 0^+ (ou 0^-). Posant $x = 1/u$, on se ramène à u tendant vers 0^+ . Or,

$$\begin{aligned} f(1/u) &= \sqrt{1/u^2 + 1/u} = \frac{\sqrt{1+u}}{u} \\ &= \frac{1+u/2-u^2/8+o(u^2)}{u} \\ &= 1/u + 1/2 - u/8 + o(u) \end{aligned}$$

Comme le système

$$a-b=1/2, \quad 1/24=ab-b^2=b(a-b)$$

admet pour unique solution

$$(a, b) = (7/12, 1/12),$$

L'expression $f(x)$ est un infiniment petit d'ordre le plus grans possible *si et seulement si*

$$a = \frac{7}{12} \text{ et } b = \frac{1}{12}.$$

d'où

$$f(x) = x + \frac{1}{2} - \frac{1}{8x} + o(1/x).$$

Bien entendu, on aurait pu aussi mettre directement le terme dominant en facteur en écrivant $f(x) = x\sqrt{1+\frac{1}{x}}$, ce qui ramène au problème de $\sqrt{1+u}$ au voisinage de 0.