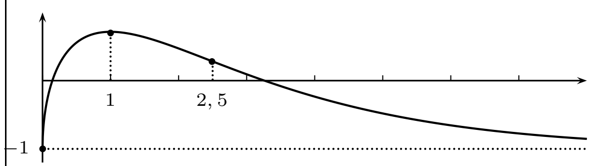
Exercice 1.

Ci-dessous la courbe de f. L'axe des ordonnées est une tangente verticale ; en plus, on a indiqué un point stationnaire, un point d'inflexion et une asymptote.



1. Tracer l'allure de f' et celle de f''.

2. Tracer l'allure des fonctions définies par

$$g(x) = f(x) + 1\,, \qquad h(x) = f(x+1)\,,$$
$$u(x) = 2f(x)\,, \qquad v(x) = f(2x)\,.$$

Exercice 2.

Soit $T \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable périodique. Montrer que T est une période de f *si et seulement si* T est une période de f'.

Exercice 3.

Le but de l'exercice est de déterminer la limite de la suite

$$a_n = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}\,, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

1. Montrer que la suite (a_n) est convergente.

2. Soit f une fonction réelle définie dans un voisinage de 0, dérivable en 0 et telle que $f(0) = 0$. On pose

$$b_n = f\left(\frac{1}{n+1}\right) + \cdots + f\left(\frac{1}{2n}\right)\,.$$

Montrer que $b_n - f'(0)a_n$ tend vers 0 quand $x \to \infty$.

3. Prendre $f(x) = \ell n(1+x)$ et conclûre.

Exercice 4.

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}^*$ une fonction continue, dérivable sur $]a,b[$. Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$\frac{f(b)}{f(a)} = \exp\left((b-a)\frac{f'(c)}{f(c)}\right)\,.$$

Exercice 5.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. Montrer qu'il existe des réels $0 < x_1 < \cdots < x_n < 1$ tels que

$$\sum_{k=1}^{n} f'(x_k) = n.$$

Exercice 6.

1. Soit $f \in \mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})$. On suppose que sa dérivée f' est strictement positive sur $[0,1]$ et que $f(0) = 0$.

1.a. Démontrer qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que

$$\forall\, x \in [0,1], \qquad f'(x) \geqslant \alpha.$$

1.b. En déduire que $f(x) \geqslant \alpha x$ pour tout $x \in [0,1]$.

2. Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$, dont la dérivée f' est strictement positive sur $\mathbb{R}_+$. Existe-t-il un réel $\alpha > 0$ tel que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+, \qquad f(x) - f(0) \geqslant \alpha x \quad ?$$

Exercice 7.

Soit f, une application dérivable de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. *On ne suppose pas que la dérivée f' est continue sur $[a,b]$.*

1. On considère les fonctions définies par

$$\phi(x) = \begin{cases} f'(a) & \text{si } x = a, \\ \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} & \text{si } a < x \leqslant b. \end{cases}$$

et

$$\psi(x) = \begin{cases} f'(b) & \text{si } x = b, \\ \dfrac{f(b)-f(x)}{b-x} & \text{si } a \leqslant x < b. \end{cases}$$

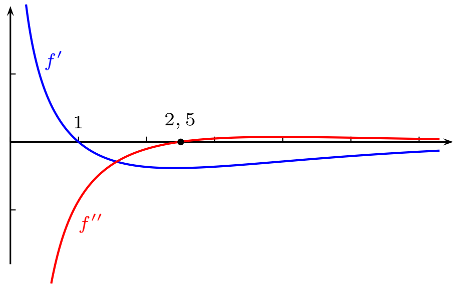
Démontrer que ϕ et ψ sont continues sur $[a,b]$.

2. Démontrer que l'application dérivée f' vérifie le théorème des valeurs intermédiaires : si $f'(a) < 0$ et $f'(b) > 0$, alors il existe $a < c < b$ tel que $f'(c) = 0$.

1. Solutions

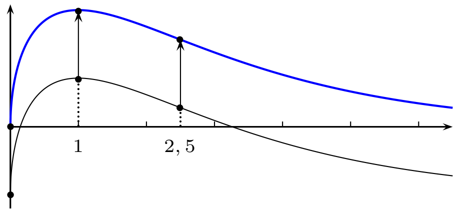
Solution 1.

1. Dérivée et dérivée seconde :

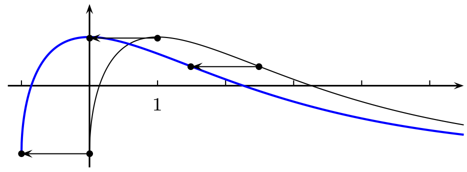


2.

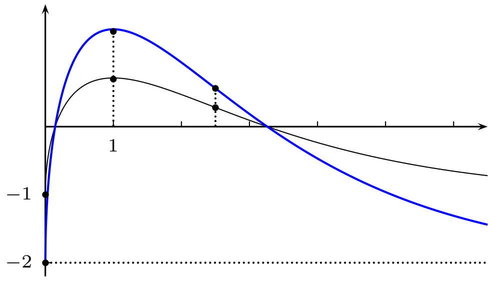
$g(x) = f(x) + 1$ (translation verticale)



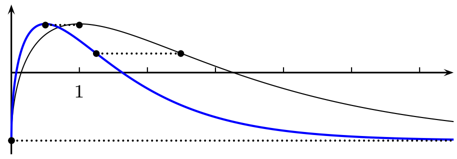
$h(x) = f(x+1)$ (translation horizontale)



$u(x) = 2f(x)$ (amplification)



$v(x) = f(2x)$ (variation accélérée)



Solution 2.

Supposons que T est une période de f. Alors $f(x+T) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Par dérivation on déduit que $f'(x+T) = f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Donc T est une période de f'.
Réciproquement, supposons que T est une période de f'. Considérons la fonction définie par $g(x) = f(x+T) - f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Alors g est dérivable et $g'(x) = f'(x+T) - f'(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Donc $g = c =$ cte, d'où $f(x+T) = f(x) + c$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On déduit par récurrence que $f(nT) = f(0) + nc$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Or d'après l'énoncé f est périodique et continue donc bornée. Cela implique que $c = 0$, ce qui montre que T est une période de f.

Solution 3.

1. La suite (a_n) est croissante car

$$\begin{aligned} a_n - a_{n-1} &= \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=n}^{2n-2} \frac{1}{k} \\ &= \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{n} = \frac{1}{2n(2n-1)} > 0\,. \end{aligned}$$

Et elle est majorée car

$$a_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \leqslant \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1} \leqslant 1\,.$$

Ainsi est est convergente.

2. Comme f est dérivable en 0, il existe une fonction φ définie au voisinage de 0 telle que

$$f(x) = f'(0)x + \varphi(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0} \frac{\varphi(x)}{x} = 0\,.$$

Soit $\epsilon > 0$. Alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall k \geqslant N\,, \quad \left|k\,\varphi\left(\frac{1}{k}\right)\right| < \epsilon\,.$$

Ainsi pour tout $n \geqslant N$ on obtient la majoration

$$\begin{aligned} \left|a_n - f'(0)b_n\right| &\leqslant \sum_{k=n+1}^{2n} \left|f\left(\frac{1}{k}\right) - f'(0)\frac{1}{k}\right| \\ &= \sum_{k=n+1}^{2n} \left|\varphi\left(\frac{1}{k}\right)\right| < \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\epsilon}{k} = a_n\epsilon \leqslant \epsilon\,. \end{aligned}$$

3. En prenant $f(x) = \ell n(1+x)$ dans la question précédente, on obtient d'abord

$$\begin{aligned} b_n &= \sum_{k=n+1}^{2n} \ell n\left(1+\frac{1}{k}\right) = \ell n\left(\prod_{k=n+1}^{2n} \frac{k+1}{k}\right) \\ &= \ell n\left(\frac{2n+1}{n+1}\right) \longrightarrow \ell n\, 2 \quad \text{si} \quad n\to\infty\,. \end{aligned}$$

Les suites $\left(b_n\right)$ et $\left(f'(0)a_n\right)$ sont adjacentes. Puisque $f'(0) = 1$, on en déduit que

$$\lim a_n = \ell n\, 2\,.$$

Solution 4.

Sous un habit bien impressionant se cache un énoncé presque trivial. En effet, il suffit d'appliquer le théorème des accroissements finies à la fonction définie par

$$g(x) = \ell n\, |f(x)|\,.$$

Il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$g'(c) = \frac{g(b) - g(a)}{b - a}\,,$$

ou encore

$$\frac{f'(c)}{f(c)} = \frac{\ell n\, |f(b)| - \ell n\, |f(a)|}{b - a} = \frac{\ell n \left|\frac{f(b)}{f(a)}\right|}{b - a}\,.$$

Remarquons que dans la dernière expression on peut ôter les valeurs absolues ; en effet, f est à valeurs dans $\mathbb{R}^*$ et donc soit strictement positive ou négative sur $[a, b]$ à cause du théorème des valeurs intermédiaires. Ainsi

$$(b - a)\frac{f'(c)}{f(c)} = \ell n\, \frac{f(b)}{f(a)}\,.$$

Pour conclûre il suffit de prendre l'exponentielle des deux côtés de l'égalité.

Solution 5.

Pour $n = 1$ il s'agit précisément du théorème des accroissements finis. Dans le cas général nous considérons la subdivision $0 < \frac{1}{n} < \frac{2}{n} < \cdots < \frac{n-1}{n} < 1$ de l'intervalle $[0, 1]$. Alors on a

$$\forall\, k \in [\![1, n]\!] \;\; \exists\, x_k \in \left]\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right[\quad : \quad f'(x_k) = n\left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f\left(\frac{k-1}{n}\right)\right).$$

On obtient ainsi une “somme téléscope” :

$$\sum_{k=1}^{n} f'(x_k) = n\sum_{k=1}^{n}\left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f\left(\frac{k-1}{n}\right)\right) = n(f(1) - f(0)) = n.$$

Solution 6.

1. *Encore le TAF !*

1.a. La fonction f' est *continue* sur le *segment* $[0, 1]$, donc elle atteint un minimum α. Comme elle ne prend que des valeurs strictement positives, ce minimum est strictement positif.

1.b. L'inégalité est évidente pour $x = 0$. Considérons maintenant un réel $0 < x \leqslant 1$. La fonction f est dérivable sur le segment $[0, x]$: d'après l'égalité des accroissements finis, il existe un réel $0 < c < x$ tel que

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(c) \geqslant \alpha.$$

Remarque – *Comme f' est continue, on peut intégrer les deux membres de l'inégalité établie à la première question entre 0 et x et donc déduire ce nouveau résultat de la positivité de l'intégrale.* Cependant, *si f est seulement dérivable, on ne peut invoquer que l'égalité des accroissements finis.*

Remarque – *En appliquant l'égalité des accroissements finis, on doit être précis, mais il n'est pas nécessaire de faire du zèle : si f est dérivable sur le segment $[a, b]$, il est inutile de dire que f est continue sur le segment $[a, b]$ et dérivable sur l'intervalle ouvert $]a, b[$.*

2. Il s'agit encore de savoir si le taux d'accroissement

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

admet un minorant strictement positif. Comme $\arctan$ est bornée,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\arctan(x) - \arctan(0)}{x} = 0,$$

donc la réponse est négative.
Explication : la fonction f', bien que continue, n'atteint pas nécessairement de minimum sur $\mathbb{R}_+$ et ce qui précède n'est donc plus valable. En revanche, f' possède une borne inférieure positive et il arrive que cette borne inférieure soit nulle, alors même que f' ne s'annule pas.
C'est le cas pour $f = \arctan$: sa dérivée, $x \mapsto 1/(1 + x^2)$, est strictement positive sur $\mathbb{R}_+$ et tend vers 0 au voisinage de $+\infty$.

Solution 7.

1. Comme quotient de fonctions continues, la fonction ϕ est continue sur l'intervalle $]a, b]$. Comme f est dérivable en a,

$$\phi(a) = f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \phi(x),$$

donc ϕ est aussi continue en $x = a$.
On justifie de manière analogue la continuité de ψ sur le segment $[a, b]$.

2. Les fonctions ϕ et ψ sont continues sur le segment $[a, b]$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, ϕ prend toutes les valeurs comprises entre $\phi(a) = f'(a)$ et $\phi(b)$ et ψ prend toutes les valeurs comprises entre $\psi(a)$ et $\psi(b) = f'(b)$. Or $\psi(a) = \phi(b)$!

Voici les différents cas possibles, selon la valeur du réel $\gamma = \psi(a) = \phi(b)$:
– si $\gamma < 0 < f'(b)$, alors il existe $x \in]a, b[$ tel que $\psi(x) = 0$;
– si $f'(a) < 0 < \gamma$, alors il existe $x \in]a, b[$ tel que $\phi(x) = 0$;
– si $\gamma = 0$, alors $\psi(a) = \phi(b) = 0$.

Mais d'après le théorème des accroissements finis,

$$\forall\, x \in]a, b]\,,\ \exists\, c \in]a, b[\,, \quad \phi(x) = f'(c)$$

et

$$\forall\, x \in [a, b[\,,\ \exists\, c \in]a, b[\,, \quad \psi(x) = f'(c).$$

Ainsi, qu'elle soit ou non continue, l'application f' vérifie la propriété des valeurs intermédiaires (théorème attribué à Darboux).