Exercice 1.

Let f be an endomorphism of a finite dimensional vector space E. Show that

$$\mathscr{F} = \{g \in \mathscr{L}(E) \mid f \circ g = g \circ f = 0\}$$

is a sub space of $\mathscr{L}(E)$. Find its dimension.

Exercice 2.

Soit A une $\mathbb{R}$-algèbre commutative, intègre et de dimension finie. Montrer que A est un corps.

Exercice 3.

On considère l'application f de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même définie par :

$$f(x, y, z) = (-x + z, -y + z, x - 2y + z)$$

pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

1. Démontrer que f est linéaire.
2. Déterminer une base du noyau de f.
3. Déterminer une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$. En déduire une base de $\mathrm{Im}(f)$.
4. Vérifier que $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Im}(f)$.
5. Calculer $(f \circ f)(x, y, z)$ et en déduire que $f \circ f$ est un projecteur.

Exercice 4.

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie et φ une application linéaire de E dans F. Montrer que φ est un isomorphisme *si et seulement si* l'image par φ de toute base de E est une base de F.

Exercice 5.

Soient $n \geqslant 0$, $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $f \in \mathscr{L}(E)$ définie par

$$\forall P \in E, \quad f(P) = P - P'.$$

Montrer que f est inversible et calculer son inverse.

Exercice 6.

Soient f_k les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par

$$\forall 0 \leqslant k \leqslant 2, \quad f_k : x \longmapsto x^k e^{2x}.$$

On note E le sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ engendré par ces trois vecteurs.

1. Quelles est la dimension de E ? En donner une base.
2. On note D l'opérateur de dérivation défini par

$$D : f \in E \longmapsto f'.$$

Prouver que $D \in \mathscr{L}(E)$.

3. Montrer que $D \in GL(E)$.

Exercice 7.

Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$ où E est un espace vectoriel de dimension finie. Déterminer le rang de l'endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ $\Phi : f \mapsto v \circ f \circ u$.

1. Solutions

Solution 1.

▶ First we remark that

$$\Phi_1 : \mathscr{L}(E) \longrightarrow \mathscr{L}(E)\,, \quad g \longmapsto f \circ g\,,$$
$$\Phi_2 : \mathscr{L}(E) \longrightarrow \mathscr{L}(E)\,, \quad g \longmapsto g \circ f\,,$$

are linear maps. This is so because

$$\begin{aligned}\Phi_1(\lambda g + \mu h) &= f \circ (\lambda g + \mu h) = \lambda f \circ g + \mu f \circ h \\ &= \lambda \Phi_1(g) + \mu \Phi_1(h)\,, \\ \Phi_2(\lambda g + \mu h) &= (\lambda g + \mu h) \circ f = \lambda g \circ f + \mu h \circ f \\ &= \lambda \Phi_2(g) + \mu \Phi_2(h)\,.\end{aligned}$$

By the way, in the above computation concerning Φ_1 we used the linearity of f. But for Φ_2 we did not ; in fact Φ_2 would still be linear even if f wasn't.
We deduce that $\mathscr{F} = \ker \Phi_1 \cap \ker \Phi_2$ as intersection of two subspaces of $\mathscr{L}(E)$ is a subspace as well.

▶ Let $n = \dim E$ and $r = \operatorname{rg} f$. An endomorphism $g \in \mathscr{L}(E)$ is in $\mathscr{F}$ if and only if

$$\operatorname{Im} g \subset \ker f \quad \text{and} \quad \operatorname{Im} f \subset \ker g\,.$$

The first condition means that g is like a linear map from an n-dimensional space to a $(n-r)$-dimensional space ; the second condition means that g vanishes on an r-dimensional sub space. Both conditions together signify that g is like a linear map from an $(n-r)$-dimensional space to an $(n-r)$ dimensional space. Thus

$$\dim \mathscr{F} = (n-r)^2\,.$$

▶ Beginner's version : if the above argument was too fast for you, try this. Choose a basis $(b_1, \ldots, b_r)$ of $\operatorname{Im} f$ and enhance it to a basis $(b_1, \ldots, b_n)$ of E. Remember that the linear map g is uniquely determined by its restriction on that basis. Now, the condition $\operatorname{Im} f \subset \ker g$ is equivalent to $g(b_1) = \cdots = g(b_r) = 0$; so our choice for the first r images is already done. The condition $\operatorname{Im} g \subset \ker f$ is then equivalent to saying that the images $g(b_k)$, $k > r$, of the $n-r$ remaining basis elements are all in $\ker f$; since the dimension of $\ker f$ is $n-r$, we can choose $g(b_{r+1}), \ldots, g(b_n)$ in an $(n-r)$-dimensional space. Using the formula $\dim \mathscr{L}(F,G) = \dim F \times \dim G$, we obtain finally $\dim \mathscr{F} = (n-r)^2$.

Solution 2.

Il faut montrer que tout élément non-nul de A est inversible. Soit $a \in A \setminus \{0\}$. L'application

$$\varphi_a \;:\; A \longrightarrow A\,, \quad b \longmapsto ab\,,$$

est linéaire. Si $b \in \ker \varphi_a$ alors $ab = 0$ et comme A est intègre cela implique que $b = 0$. Donc le noyeau de φ_a est nul. L'endomorphisme φ_a est alors injectif, et même bijectif car A est de dimension finie. En particulier il existe $b \in A$ tel que $ab = 1$. Donc a est inversible.

Solution 3.

1. À faire une fois dans sa vie. Une seule. Et sans se tromper.

2. Le vecteur (x, y, z) appartient au noyau de f si, et seulement si, il vérifie le système suivant :

$$\begin{cases} -x \quad\quad + z = 0 \\ \quad - y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases}$$

qui est équivalent au système triangulaire :

$$\begin{cases} -x \quad\quad + z = 0 \\ \quad - y + z = 0 \end{cases}$$

Par conséquent, $(x, y, z) \in \operatorname{Ker}(f)$ si, et seulement si, il existe un scalaire t tel que

$$(x, y, z) = t(1, 1, 1).$$

Le vecteur $(1, 1, 1)$ est donc un vecteur directeur du noyau de f.

3. On sait que $\operatorname{Im}(f)$ est engendré par les images par f des trois vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$, c'est-à-dire par

$$\begin{aligned} u_1 &= (-1, 0, 1), \\ u_2 &= (0, -1, -2), \\ u_3 &= (1, 1, 1). \end{aligned}$$

On trouve les relations de liaison entre ces trois vecteurs en résolvant l'égalité vectorielle

$$xu_1 + yu_2 + zu_3 = 0,$$

traduite par le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} -x \quad\quad + z = 0 \\ \quad - y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases}$$

qu'on a déjà résolu à la question précédente : toutes les relations de liaison sont proportionnelles à

$$u_1 + u_2 + u_3 = 0.$$

Par conséquent, l'image de f est engendrée par (u_1, u_2) et comme ces deux vecteurs ne sont pas proportionnels, ils sont linéairement indépendants et forment une base de $\operatorname{Im}(f)$.

Remarque – *Il est important de bien comprendre pourquoi le même calcul fournit une base du noyau et les relations de liaison entre les vecteurs d'une famille génératrice de l'image.*
Soit (e_1, e_2, e_3), *une base de* $\mathbb{R}^3$ *(ici, la base canonique). On sait que l'image de* f *est engendrée par les vecteurs* $f(e_1)$, $f(e_2)$ *et* $f(e_3)$. *Les relations de liaison entre ces vecteurs sont de la forme :*

$$\lambda_1 f(e_1) + \lambda_2 f(e_2) + \lambda_3 f(e_3) = 0,$$

soit, par linéarité de f,

$$f(\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3) = 0,$$

ce qui signifie que le vecteur

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3$$

appartient au noyau de f.

4. Le vecteur $(1, 1, 1)$ est un vecteur directeur du noyau de f et il appartient à l'image de f (c'est le vecteur u_3), donc $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Im}(f)$.

Remarque – *Pour démontrer qu'un sous-espace* F *est contenu dans un sous-espace* G, *il suffit de vérifier que les vecteurs d'une famille génératrice de* F *sont tous des vecteurs de* G.

5. Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned} f\big(f(x,y,z)\big) &= \big(-(-x+z)+(x-2y+z), \\ &\qquad -(-y+z)+(x-2y+z), \\ &\qquad (-x+z)-2(-y+z) \\ &\qquad\quad +(x-2y+z)\big) \\ &= (2x-2y, x-y, 0). \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} (f\circ f)\big((f\circ f)(x,y,z)\big) &= \big(2(2x-2y)-2(x-y), \\ &\qquad (2x-2y)-(x-y), 0\big) \\ &= (2x-2y, x-y, 0) \\ &= (f\circ f)(x,y,z) \end{aligned}$$

donc $f \circ f$ est un projecteur.

Solution 4.

► Montrons que si φ est un isomorphisme, l'image de toute base de E est une base de F : soit $\mathscr{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de E et nommons $\mathscr{B}'$ la famille $\{\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)\}$.

⋄ $\mathscr{B}'$ est libre. Soient en effet $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$\lambda_1\varphi(e_1) + \cdots + \lambda_n\varphi(e_n) = 0.$$

Alors $\varphi(\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n) = 0$ donc, comme φ est injective,

$$\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n = 0$$

puis, comme $\mathscr{B}$ est libre, $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$.

⋄ $\mathscr{B}'$ est génératrice. Soit $y \in F$. Comme φ est surjective, il existe $x \in E$ tel que $y = \varphi(x)$. Comme $\mathscr{B}$ est génératrice, on peut choisir $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$x = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n.$$

Alors $y = \lambda_1\varphi(e_1) + \cdots + \lambda_n\varphi(e_n)$.

► Supposons que l'image par φ de toute base de E soit une base F. Soient $\mathscr{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de E et $\mathscr{B}'$ la base $\{\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)\}$.

⋄ $\mathrm{Im}(\varphi)$ contient $\mathcal{B}'$ qui est une partie génératrice de F. Donc φ est surjective.

⋄ Soit maintenant $x \in E$ tel que $\varphi(x) = 0$. Comme $\mathscr{B}$ est une base, il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$x = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n.$$

Alors

$$\varphi(x) = 0 = \lambda_1\varphi(e_1) + \cdots + \lambda_n\varphi(e_n)$$

donc puisque $\mathscr{B}'$ est libre : $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$. En conséquence si $\varphi(x) = 0$ alors $x = 0$: φ est injective.

Solution 5.

Posons $Q = P - P'$. On a clairement par telescopage

$$Q + Q' + \cdots + Q^{(n)} = P - P^{(n+1)} = P$$

car $P^{(n+1)} = 0$. L'application g de E dans E définie par

$$g(Q) = Q + Q' + \cdots + Q^{(n)}$$

vérifie $g \circ f = id_E$: f est inversible à gauche dans l'anneau $(\mathscr{L}(E), +, \circ)$ avec E de dimension finie $n + 1$, on en déduit que f est un isomorphisme d'inverse g.

Solution 6.

1. Prouvons que la famille $(f_k)_{0 \leqslant k \leqslant 2}$ est libre. Soient λ_0, λ_1 et $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 = 0,$$

c'est-à-dire, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\lambda_0 e^{2x} + \lambda_1 x e^{2x} + \lambda_2 x^2 e^{2x} = 0,$$

ie,

$$\lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 = 0,$$

et puisque une fonction polynôme est nulle *si et seulement si* tous ses cœfficients sont nuls ,

$$\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = 0.$$

La famille $(f_k)_{0 \leqslant k \leqslant 2}$ est donc libre et E est de dimension 3.

2. C'est parti !

► Le caractère linéaire de la dérivation est bien connu, il suffit de vérifier que $D(E) \subset E$. On remarque sans peine que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$f_0'(x) = 2e^{2x}$, $f_1'(x) = 2xe^{2x}+e^{2x}$, $f_2'(x) = 2xe^{2x}+2x^2e^{2x}$.

Ainsi $D(f_0) = 2f_0, D(f_1) = f_0+2f_1$ et $D(f_2) = 2f_1+2f_2$, d'où $D(E) \subset E$ et $D \in \mathscr{L}(E)$.

3. Prouvons que l'image de (f_0, f_1, f_2) par D est une base de E. Puisque E est de dimension 3, il suffit de prouver que le rang de la famille image est trois. D'après les calculs précédents, il s'agit de déterminer le rang de la famille suivante,

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Cette dernière étant de rang 3, le résultat est acquis. L'image d'une base de E par D étant une base de E, D est un isomorphisme de E : $D \in GL(E)$.

Solution 7.

► **Solution 1**
Soit S un supplémentaire de $\operatorname{Ker} u$. On définit l'application linéaire

$$\Psi : \begin{array}{rcl} \operatorname{Im}\Phi & \longrightarrow & \mathcal{L}(S, \operatorname{Im} v) \\ g & \longmapsto & g_{|S}^{|\operatorname{Im} v} \end{array}$$

Cette application est bien définie car, pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$, $\operatorname{Im}(v \circ f \circ u) \subset \operatorname{Im} v$. Montrons que c'est un isomorphisme.
Soit $g \in \operatorname{Ker}\Psi$. Puisque $g \in \operatorname{Im}\Phi$, il existe $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $g = v \circ f \circ u$. Comme $g \in \operatorname{Ker}\Psi$, $g_{|S} = 0$. Mais on a aussi évidemment $g_{|\operatorname{Ker} u} = 0$. Puisque $E = \operatorname{Ker} u \oplus S$, $g = 0$ et Ψ est injective.
On sait que u induit un isomorphisme $\tilde{u}$ de S sur $\operatorname{Im} u$. De même, v induit un isomorphisme $\tilde{v}$ de T sur $\operatorname{Im} v$ où T est un supplémentaire de $\operatorname{Ker} v$. Soit $\tilde{g} \in \operatorname{Im}\Psi$. On définit f de la manière suivante : $f(x) = \tilde{v}^{-1} \circ \tilde{g} \circ \tilde{u}^{-1}(x)$ pour $x \in \operatorname{Im} u$ et $f = 0$ sur un supplémentaire quelconque de $\operatorname{Im} u$. On a alors bien $\Psi(v \circ f \circ u) = \tilde{g}$, ce qui montre que Ψ est surjective.
Par conséquent, $\operatorname{rg}\Phi = \dim \mathcal{L}(S, \operatorname{Im} v) = \operatorname{rg} u \operatorname{rg} v$.

► **Solution 2**
Notons S un supplémentaire de $\operatorname{Im} u$ et T un supplémentaire de $\operatorname{Ker} v$. On pose

$$\mathcal{F} = \{f \in \mathcal{L}(E), S \subset \operatorname{Ker} f, \operatorname{Im} f \subset T\}.$$

On vérifie que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$. Montrons que Φ induit un isomorphisme de $\mathcal{F}$ sur $\operatorname{Im}\Phi$.
Soit $f \in \mathcal{F} \cap \operatorname{Ker}\Phi$. Par définition de $\mathcal{F}$, $f_{|S} = 0$. De plus, $v \circ f \circ u = 0$ signifie que $f(\operatorname{Im} u) \subset \operatorname{Ker} v$. Mais, par définition de $\mathcal{F}$, $\operatorname{Im} f \subset T$. Donc $f(\operatorname{Im} u) \subset \operatorname{Ker} v \cap T = \{0\}$. D'où $f_{|\operatorname{Im} u} = 0$. Comme $E = S \oplus \operatorname{Im} u$, $f = 0$ et la restriction de Φ à $\mathcal{F}$ est injective.
Montrons que $\Phi(\mathcal{F}) = \operatorname{Im}\Phi$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Notons π_1 la projection de E sur $\operatorname{Im} u$ parallèlement à S et π_2 la projection de E sur T parallèlement à $\operatorname{Ker} v$. On vérifie que $\pi_2 \circ f \circ \pi_1 \in \mathcal{F}$. De plus, $\pi_1 \circ u = u$ et $v \circ \pi_2 = v$. Donc $v \circ (\pi_2 \circ f \circ \pi_1) \circ u = v \circ f \circ u$ i.e. $\Phi(\pi_2 \circ f \circ \pi_1) = \Phi(f)$.
Ainsi Φ induit un isomorphisme de $\mathcal{F}$ sur $\operatorname{Im}\Phi$ et donc $\operatorname{rg}\Phi = \dim \mathcal{F}$. Or $\mathcal{F}$ est isomorphe à $\mathcal{L}(\operatorname{Im} u, T)$. De plus, v induit un isomorphisme de T sur $\operatorname{Im} v$ donc $\dim T = \operatorname{rg} v$. Ainsi $\operatorname{rg}\Phi = \dim \mathcal{F} = \dim \mathcal{L}(\operatorname{Im} u, T) = \operatorname{rg} u \operatorname{rg} v$.

► **Solution 3**
Commençons par montrer le lemme suivant : si $w \in \mathcal{L}(E)$ est de rang p alors il existe deux bases (e_i) et (ε_i) de E telles que

$$\operatorname{mat}_{(e_i),(\varepsilon_i)}(w) = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_p & \mathbb{O}_{p,n-p} \\ \mathbb{O}_{n-p,p} & \mathbb{O}_{p,p} \end{pmatrix}$$

où n est la dimension de E. En effet, soit S un supplémentaire de $\operatorname{Ker} w$. On se donne une base $(e_1, \dots, e_p)$ de S et une base $(e_{p+1}, \dots, e_n)$ de $\operatorname{Ker} v$. Posons $\varepsilon_i = w(e_i)$ pour $1 \leqslant i \leqslant p$. Comme w induit un isomorphisme de S sur $\operatorname{Im} w$, $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$ est une base de $\operatorname{Im} w$ qu'on complète en une base $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ de E. La matrice de w dans ces bases est bien de la forme voulue.
Notons $p = \operatorname{rg} u$ et $q = \operatorname{rg} v$. Notons $(e_i), (\varepsilon_i)$ et $(e_i'), (\varepsilon_i')$ les bases définies dans le lemme correspondant respectivement à u et v. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $M = \operatorname{mat}_{(\varepsilon_i),(e_i')}(f)$. Alors $\operatorname{mat}_{(e_i),(\varepsilon_i')}(v \circ f \circ u)$ est la sous-matrice de M $(m_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant p, 1 \leqslant j \leqslant q}$. Ainsi $\operatorname{Im}\Phi$ est isomorphe à $\mathfrak{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et est donc de dimension $pq = \operatorname{rg} u \operatorname{rg} v$.