

Exercice 1.

Prove or disprove the following statements.
There exists a continuous...

1. surjection from $[0, 1]$ onto $[0, \infty[$.
2. bijection between $]0, 1[$ and $[0, \infty[$.
3. surjection from $[0, 1]$ onto $[0, 1[$.
4. bijection between $]0, 1[$ and $[0, 1[$.
5. bijection between $]0, 1[$ and \mathbb{R} .
6. surjection from $]0, 1[$ onto $[0, 1]$.
7. bijection between $]0, 1[$ and $[0, 1]$.
8. surjection from $]0, 1]$ onto \mathbb{R} .
9. surjection from $]0, 1]$ onto $]0, \infty[$.

Exercice 2.

1. Show that for all $x, y \geq 0$, $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x - y|}$.
2. Deduce that the function $]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{x}$ is uniformly continuous.

Exercice 3.

Soit f une fonction uniformément continue de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$|f(x)| \leq a|x| + b.$$

Exercice 4.

Donner un exemple d'application f de $[0, 1]$ dans lui-même bijective et continue en aucun point.

Exercice 5.

Etablir que tout polynôme de degré impair à coefficients réels s'annule au moins une fois sur \mathbb{R} .

Exercice 6.

Soit f , une application continue de $[0, 1]$ dans lui-même telle que $f \circ f = f$.

1. On note $S = f([0, 1])$.
 - 1.a. Justifier que S est un segment inclu dans $[0, 1]$. On le notera $S = [a, b]$.
 - 1.b. Pour tout réel $x \in S$, calculer $f(x)$.
2. Tracer l'allure du graphe de f .

Exercice 7.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $f \circ f$ admette un point fixe a . f admet-elle un point fixe ?

Exercice 8.

Un alpiniste commence à escalader une montagne un samedi à 7 heures du matin. À 5 heures de l'après-midi, il atteint le sommet, où il décide de passer la nuit. Le dimanche matin à 7 heures, il entame sa descente. Il arrive à son point de départ à 17 heures. On suppose que son altitude varie continument au cours du temps. Prouver qu'à un même moment de la journée du samedi et celle du dimanche, il était à la même altitude.

Exercice 9.

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue non identiquement nulle. Prouver que

$$\int_0^1 f(x)^2 dx > 0.$$

1. Solutions

Solution 1.

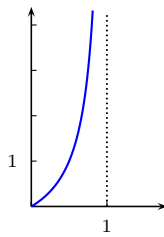
1. The statement is wrong. Suppose that $f : [0, 1] \rightarrow [0, \infty[$ is continuous. Then there exists $a \in [0, 1]$ such that

$$\forall x \in [0, 1] : f(x) \leq f(a).$$

Then f is not surjective since it doesn't take the value $f(a) + 1$. ζ

2. The statement is true.

$$\varphi :]0, 1[\rightarrow [0, \infty[, x \mapsto \frac{1}{1-x} - 1.$$



Another example is $]0, 1[\rightarrow [0, \infty[, x \mapsto \tan(\pi x/4)$

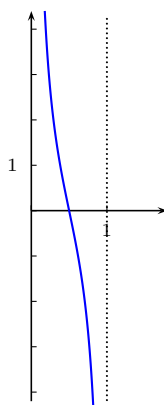
3. The statement is wrong. Suppose that $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1[$ is a continuous surjection. Then $\varphi \circ f$, where φ is the from the preceding proof, is a continuous surjection from $[0, 1]$ onto $[0, \infty[$. Contradiction to the first question. ζ

Alternative proof : Suppose that $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1[$ is continuous. Then it takes its maximum value M . Since $M \in [0, 1[$ we also have $(M + 1)/2 \in [0, 1[$. But f can't take the value $(M + 1)/2$ since it is greater than M , and therefore f is not surjective. ζ

4. The statement is true. $]0, 1[\rightarrow]0, 1[, x \mapsto 1 - x$.

5. The statement is true.

$$]0, 1[\rightarrow \mathbb{R} , x \mapsto \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1}.$$



6. The statement is true.

$$]0, 1[\rightarrow [0, 1] , x \mapsto \sin(2\pi x)^2.$$

7. The statement is wrong. Suppose that $f :]0, 1[\rightarrow [0, 1]$ is a continuous bijection. Since f is surjective there exists

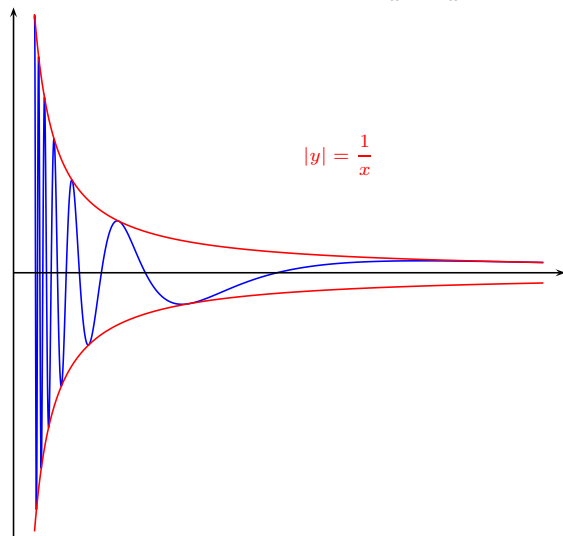
$b \in]0, 1[$ such that $f(b) = 1$. Let $a \in]0, b[$ and $c \in]b, 1[$. Since $f(b) = 1$ is the maximum value of f and since f is injective we get $f(a) < 1$ and $f(c) < 1$. Let $y \in]f(a), 1[\cap]f(c), 1[$. By the intermediate value theorem we get

$$\exists x_1 \in]a, b[: f(x_1) = y \text{ and } \exists x_2 \in]b, c[: f(x_2) = y.$$

This is a contradiction to the injectivity of f . ζ

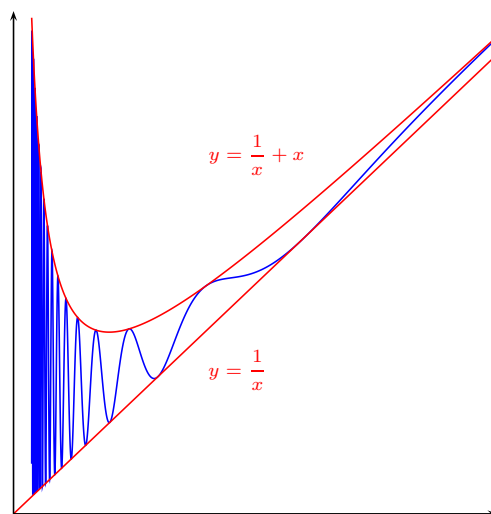
8. The statement is true.

$$]0, 1] \rightarrow \mathbb{R} , x \mapsto \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}.$$



9. The statement is true.

$$]0, 1] \rightarrow [0, \infty[, x \mapsto \frac{1}{x} \left(\sin \frac{1}{x} \right)^2 + x.$$



Solution 2.

1. Let $x, y \geq 0$. Without loss of generality we can suppose that $y \leq x$. Then we have

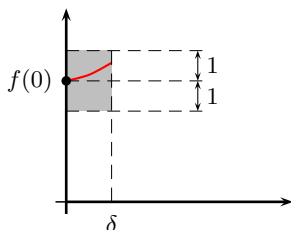
$$\begin{aligned} \sqrt{x} - \sqrt{y} \leq \sqrt{x-y} &\iff x - 2\sqrt{xy} + y \leq x - y \\ &\iff y \leq \sqrt{xy} \text{ (true!)} \end{aligned}$$

Solution 3.

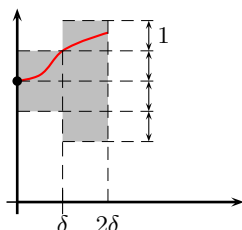
En prenant $\epsilon = 1$ dans la définition de la continuité uniforme, on sait qu'il existe $\delta > 0$ tel que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ on a

$$|x - y| \leq \delta \implies |f(x) - f(y)| \leq 1.$$

Regardons d'abord graphiquement ce qui se passe à droite de 0. Nous supposons, dans les dessins suivants, que $f(0)$ est positif. Entre 0 et δ la courbe de f doit être contenue dans le rectangle hachuré.



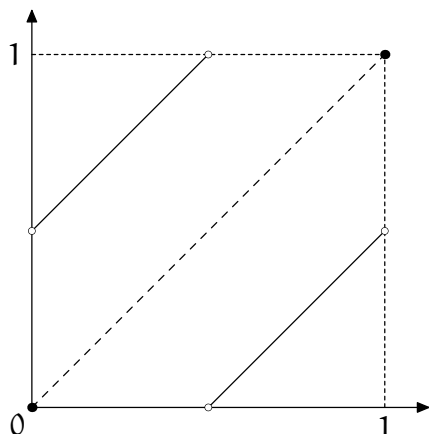
Maintenant regardons ce qui peut se passer en δ . Dans le « pire » des cas la courbe passera par l'un des sommets du côté droit du rectangle hachuré. Alors, entre δ et 2δ la courbe de f doit être contenue dans la partie hachurée suivante.



En continuant ainsi on « voit » que la fonction est bien majorée pour $x > 0$ par une fonction affine ayant $1/\delta$ pour

Solution 4.

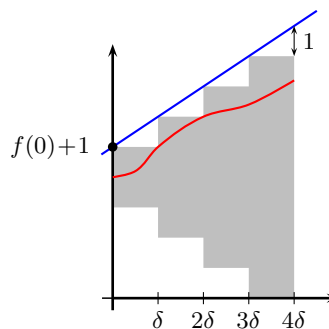
Tout commence par une figure.



2. Let $\epsilon > 0$. Put $\delta = \epsilon^2$. Then for all $x, y \geq 0$ we have

$$|x - y| < \delta \implies |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x - y|} \leq \sqrt{\delta} = \epsilon.$$

coefficient directeur et $f(0) + 1$ comme ordonnée à l'origine :



Il ne reste qu'à formaliser de cette idée ! Nous établissons d'abord la majoration demandée sur \mathbb{R}^* . Soit donc $x \geq 0$. Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que x est dans l'intervalle $[n\delta, (n+1)\delta[$; autrement dit $n = \lfloor x/\delta \rfloor$. En utilisant l'inégalité triangulaire sur une somme « accordéon » on obtient

$$\begin{aligned} |f(x)| &= \left| f(0) + \sum_{k=1}^n f(k\delta) - f((k-1)\delta) + (f(x) - f(n\delta)) \right| \\ &\leq |f(0)| + \sum_{k=1}^n |f(k\delta) - f((k-1)\delta)| + |f(x) - f(n\delta)| \\ &\leq |f(0)| + n + 1 \leq \frac{x}{\delta} + 1 + |f(0)|. \end{aligned}$$

Il existe donc $a, b \in \mathbb{R}^*$ tels que $|f(x)| \leq ax + b$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$. On peut faire le même raisonnement pour $x \in \mathbb{R}^-$.

Soit f définie sur $[0, 1]$ par

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q} \\ x + 1/2 & \text{si } x \in [0, 1/2] \cap \mathbb{Q}^c \\ x - 1/2 & \text{si } x \in]1/2, 1] \cap \mathbb{Q}^c \end{cases}$$

► Cette fonction est bijective car $f \circ f = id_{[0,1]}$.

► La fonction f n'est continue en aucun point de $[0, 1]$ (il suffit par exemple d'appliquer le critère séquentiel pour le vérifier).

REMARQUE — On peut trouver une « formule » pour la définition de f sur $[0, 1] \cap \mathbb{Q}^c$:

$$\forall x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}^c, f(x) = x + 1/2 - \lfloor x + 1/2 \rfloor.$$

Solution 5.

Soit P un polynôme à coefficients réels et de degré impair. Quitte à remplacer P par $-P$, on peut supposer que le coefficient dominant de P est strictement positif. Nous avons donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} P(t) = +\infty$ et $\lim_{t \rightarrow -\infty} P(t) = -\infty$. Si on applique les définitions de ces limites avec $A = 1$, on

obtient deux réels $B > 0$ et $B' > 0$, tels que si $t \geq B$ et $t' \leq -B'$, alors $P(t) > 1$ et $P(t) < -1$. L'inégalité $P(B)P(-B') \leq 0$ et le théorème des valeurs intermédiaires entraînent l'existence d'un réel t_0 entre $-B'$ et B tel que $P(t_0) = 0$.

Solution 6.

1. On note $S = f([0, 1])$.

1.a. L'ensemble S est un segment de \mathbb{R} en tant qu'image du segment $[0, 1]$ par l'application continue f . Comme f est à valeurs dans $[0, 1]$, on a $S \subset [0, 1]$. On le notera $S = [a, b]$, avec

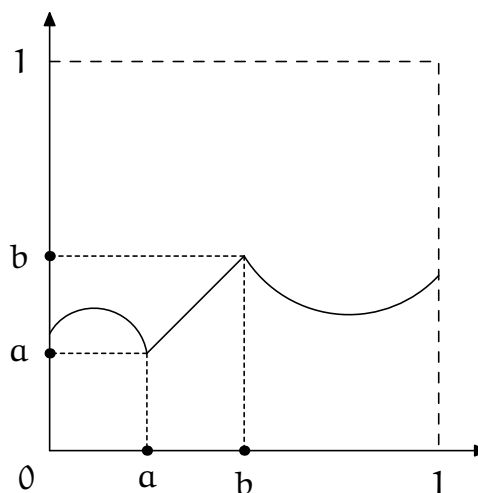
$$a = \min_{t \in [0,1]} f(t) \text{ et } b = \max_{t \in [0,1]} f(t).$$

1.b. Soit $x \in S$. Il existe $u \in [0, 1]$ tel que $x = f(u)$. Ainsi

$$f(x) = f(f(u)) = f(u) = x$$

*car $f \circ f = f$.

2. On a $0 \leq a \leq b \leq 1$. Sur $[0, a]$ et sur $[b, 1]$, f est à valeurs dans $[a, b]$ avec $f(a) = a$ et $f(b) = b$; sur $[a, b]$, f vaut l'identité. On en déduit l'allure du graphe de f :



REMARQUE — les restrictions de f à $[0, a]$ et $[b, 1]$ sont des éléments quelconques des ensembles suivants

$$\{g : [0, a] \rightarrow [a, b] \mid g \text{ continue et } g(a) = a\}$$

et

$$\{g : [b, 1] \rightarrow [a, b] \mid g \text{ continue et } g(b) = b\}.$$

Solution 7.

Posons $g : x \mapsto f(x) - x$. On a $g(a) = f(a) - a$ et $g(f(a)) = a - f(a) = -g(a)$. Donc g s'annule entre a et $f(a)$ i.e. f a un point fixe entre a et $f(a)$.

Solution 8.

Pour $t \in [7, 17]$, on note $S(t)$ (resp. $D(t)$) l'altitude de l'alpiniste au moment t de la journée du samedi (resp. dimanche). La fonction $f = S - D$ est continue et vérifie

$f(7) \leq 0 \leq f(17)$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in [7, 17]$ tel que $f(c) = 0$, c'est-à-dire $S(c) = D(c)$. L'instant c répond à la question.

Solution 9.

On pose $g = f^2 \geq 0$. Comme g n'est pas la fonction nulle il existe $a \in [0, 1]$ tel que $g(a) > 0$.

► Supposons dans un premier temps que $0 < a < 1$. Soit

$$\varepsilon := \frac{g(a)}{2} > 0.$$

Par continuité de g il existe $\delta > 0$ tel que $[a - \delta, a + \delta] \subset [0, 1]$ et tel que

$$\forall x \in [a - \delta, a + \delta] : |g(x) - g(a)| < \varepsilon.$$

Or cette inégalité équivaut à l'encadrement $g(a) - \varepsilon < g(x) < g(a) + \varepsilon$. Donc en particulier

$$\forall x \in [a - \delta, a + \delta] : g(x) > g(a) - \varepsilon = \frac{g(a)}{2}.$$

Ainsi nous obtenons

$$\int_0^1 g(x) dx \geq \int_{a-\delta}^{a+\delta} g(x) dx \geq \int_{a-\delta}^{a+\delta} \frac{g(a)}{2} dx = \delta g(a) > 0.$$

► Si $a = 0$ ou si $a = 1$ on adapte facilement la preuve ci-dessus.