

**Exercice 1.**

Déterminer les asymptotes à la courbe représentative de  $f$  définie par  $f(x) = \sqrt{x^2 + xe^{\frac{1}{x}}}$ .

**Exercice 2.**

Soient  $E$  un  $\mathbb{R}$ -ev,  $u$  et  $v$  dans  $\mathcal{L}(E)$  tels que

$$u \circ v - v \circ u = u.$$

Etablir que, pour tout  $k$  dans  $\mathbb{N}^*$  :

$$u^k \circ v - v \circ u^k = ku^k.$$

**Exercice 3.**

Soit  $f$ , un endomorphisme de  $E$ . Pour tout entier  $k \geq 2$ , on note

$$f^k = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_{k \text{ fois}}.$$

On suppose qu'il existe un entier  $n \geq 2$  tel que  $f^n$  soit l'application identiquement nulle.

1. Soit  $x \in \text{Ker}(I - f)$ . Démontrer que  $f^k(x) = x$  pour tout entier  $k \geq 1$ . En déduire que  $I - f$  est injectif.

2. Simplifier les expressions

$$(I - f) \circ (I + f + f^2 + \dots + f^{n-1})$$

et  $(I + f + f^2 + \dots + f^{n-1}) \circ (I - f)$

en utilisant les règles de calcul dans  $L(E)$  et en déduire que  $I - f$  est un automorphisme.

3. Démontrer que, pour tout entier  $k \geq 1$ , l'endomorphisme  $I - f^k$  est inversible. On précisera l'expression de son inverse.

**Exercice 4.**

Déterminer les polynômes  $P$  de  $\mathbb{R}[X]$  divisibles par leur polynôme dérivé  $P'$ .

**Exercice 5.**

Soit  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  croissante telle que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - f(x-1)) = 0.$$

Montrer que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0.$$

**Exercice 6.**

On note  $[x]$  la partie entière d'un réel  $x$ .

1. Déterminer les limites en  $+\infty$  des expressions suivantes :

1.a.  $f(x) = x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$  ;      1.b.  $g(x) = \frac{[x]}{x}$ .

2. Déterminer la limite en  $0+$  de :

$$f(x) = x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor.$$

3. Montrer que

$$h(x) = \frac{x^x}{[x]^{[x]}}$$

n'admet pas de limite en  $+\infty$ .

**Exercice 7.**

Calculer lorsqu'elles existent les limites suivantes

- |   |   |
|---|---|
| 1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2 x }{x}$ ;            | 5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1+x^2}}{x}$ ; |
| 2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 2 x }{x}$ ;      | 6. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+5}}{\sqrt{x-3}}$ ; |
| 3. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2}$ ;    | 7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2} - 1}{x^2}$ ;     |
| 4. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin^2(x)}{1 + \cos(x)}$ ; | 8. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^n - 1}$ .                 |

**Exercice 8.**

Soit  $f$  une fonction définie au voisinage d'un point  $x_0$ . Comparer les deux propriétés suivantes :

- a.  $\lim_{h \rightarrow 0} (f(x_0 + h) - f(x_0)) = 0$ .
- b.  $\lim_{h \rightarrow 0} (f(x_0 + h) - f(x_0 - h)) = 0$ .

**Exercice 9.**

Soit  $f$  une fonction définie au voisinage d'un point  $x_0$ . Comparer les deux propriétés suivantes :

- a.  $\lim_{h \rightarrow 0} (f(x_0 + h) - f(x_0)) = 0$ .
- b.  $\lim_{h \rightarrow 0} (f(x_0 + h) - f(x_0 - h)) = 0$ .

**Exercice 10.**

Soient  $k \in \mathbb{R}$  et  $h > 0$ . Déterminer  $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} E(kt)/E(ht)$  où  $E(t)$  est la partie entière de  $t$ .

### 1. Solutions

**Solution 1.**

Les racines de  $x^2 + x$  sont 0 et  $-1$ .  $f$  est donc définie sur  $] - \infty, -1] \cup ]0; +\infty[$ . On a d'abord  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$  par croissance comparée. La courbe admet donc l'axe des ordonnées comme asymptote verticale. De plus, en  $\pm\infty$

$$\begin{aligned} f(x) &= |x| \sqrt{1 + \frac{1}{x}} e^{\frac{1}{x}} \\ &= |x| \left( 1 + \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \right) \left( 1 + \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \right) \\ &= |x| \left( 1 + \frac{3}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \right) \end{aligned}$$

La courbe admet donc la droite d'équation  $y = x + \frac{3}{2}$  comme asymptote oblique en  $+\infty$  et la droite d'équation  $y = -x - \frac{3}{2}$  comme asymptote oblique en  $-\infty$ .

**Solution 2.**

Démontrons la formule par récurrence sur  $k \in \mathbb{N}^*$ .

►  $HR(1)$  est banale car  $u \circ v - v \circ u = u$ .

► Soit  $k \geq 1$ . Supposons  $HR(k)$  vérifiée, i.e.

$$u^k \circ v - v \circ u^k = k u^k.$$

En composant à gauche par  $u$ , on obtient :

$$u^{k+1} \circ v - u \circ v \circ u^k = k u^{k+1}.$$

Mais, en composant à droite par  $u^k$  dans l'égalité

$$u \circ v - v \circ u = u,$$

on obtient également

$$u \circ v \circ u^k - v \circ u^{k+1} = u^{k+1}.$$

Ainsi, en sommant membre à membre ces égalités, on aboutit à

$$u^{k+1} \circ v - v \circ u^{k+1} = (k+1) u^{k+1}.$$

$HR(k+1)$  est donc vérifiée.

►  $HR(k)$  est donc vérifiée pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$  d'après le principe de récurrence.

**Solution 3.**

1. Si  $x \in \text{Ker}(I - f)$ , alors  $(I - f)(x) = 0_E$ , donc  $x - f(x) = 0_E$ , soit

$$f(x) = x.$$

Supposons qu'il existe un entier  $k \geq 1$  tel que  $f^k(x) = x$ . Alors, par hypothèse de récurrence,

$$f^{k+1}(x) = f^k(f(x)) = f^k(x) = x.$$

Par conséquent,  $f^k(x) = x$  pour tout entier  $k \geq 1$  et en particulier pour  $k = n$ . Or  $f^n$  est l'application identiquement nulle, donc  $f^n(x) = 0_E$ . Ainsi  $x = 0_E$ , ce qui démontre que le noyau de  $I - f$  est réduit au vecteur nul, et donc que  $I - f$  est injectif.

2. On peut développer et factoriser dans  $\mathcal{L}(E)$  comme dans  $\mathbb{C}$  (en remplaçant la multiplication complexe par le

produit de composition). On en déduit que

$$(I - f) \circ (I + f + f^2 + \dots + f^{n-1}) = I - f^n = I$$

puisque  $f^n$  est l'endomorphisme nul. De même,

$$(I + f + f^2 + \dots + f^{n-1}) \circ (I - f) = I.$$

Ces deux relations montrent que  $I - f$  est un automorphisme et ayant pour automorphisme réciproque

$$(I + f + f^2 + \dots + f^{n-1}).$$

3. On vérifie que l'application réciproque de  $I - f^k$  est

$$I + f^k + f^{2k} + \dots + f^{k(n-1)}.$$

**Solution 4.**

► Soit  $P$  un polynôme réel non nul divisible par son polynôme dérivé  $P'$ . Notons  $Q$  leur quotient.  $Q$  est de degré un et, si  $n \geq 1$  désigne le degré de  $P$ , de coefficient dominant  $\frac{1}{n}$ . Soit  $a$  l'unique racine réelle de  $Q$ ,

$$nP = (X - a)P'.$$

En dérivant formellement une fois, on obtient,

$$nP' = (X - a)P'' + P',$$

ie

$$(n - 1)P' = (X - a)P''.$$

Par une récurrence immédiate, on prouve que pour tout entier  $k \leq n$ ,

$$(n - k)P^{(k)} = (X - a)P^{(k+1)}.$$

On a donc, après évaluation en  $a$ ,  $\forall k \leq n - 1$ ,

$$(n - k)P^{(k)}(a) = 0.$$

Le réel  $a$  est donc une racine de  $P$  de multiplicité au moins égale à  $n$ . Puisque  $n$  est le degré de  $P$ ,  $P$  est de la forme

$$P = \lambda(X - a)^n, \quad n \geq 1, \quad \lambda \in \mathbb{R}^*.$$

► Réciproquement, tout polynôme  $P$  de la forme

**Solution 5.**

Soit  $\varepsilon > 0$ . Comme  $f$  est croissante et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x+1) - f(x)) = 0,$$

il existe  $M \geq 1$  tel que

$$\forall x \geq M, \quad 0 \leq f(x) - f(x-1) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Soit  $x \geq M$ . Notons  $n = \lfloor x - M \rfloor$ . On a alors les  $n + 1$  inégalités suivantes

$$\forall 0 \leq k \leq n, \quad 0 \leq f(x-k) - f(x-k-1) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

En sommant ces inégalités, on aboutit après télescopage à

$$0 \leq f(x) - f(x-n-1) \leq (n+1) \frac{\varepsilon}{2}.$$

Comme  $n = \lfloor x - M \rfloor \leq x - M$ , on a en divisant par  $x > 0$  et en remarquant que  $x - n \leq x$ ,

$$0 \leq \frac{f(x)}{x} \leq \frac{f(x-n-1)}{x} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

**Solution 6.**

1. 1.a. Pour tout  $x > 1$ , on a :

$$\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = 0$$

donc  $f(x) = 0$ . Ainsi :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

1.b. Pour tout réel  $x$ , on a :

$$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$$

et pour tout  $x > 0$ , on aboutit à :

$$1 - \frac{1}{x} < g(x) \leq 1.$$

On déduit alors du théorème des gendarmes que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1.$$

2. Pour tout  $x > 0$ , on a

$$f(x) = g(1/x),$$

et on a vu que

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} g(u) = 1.$$

$$P = \lambda(X - a)^n, \quad n \geq 1, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

est clairement divisible par son polynôme dérivé.

Or,

$$n \leq x - M < n + 1$$

ainsi

$$M - 1 \leq x - n - 1 < M$$

et donc, par croissance de  $f$ , on a

$$f(x - n - 1) \leq f(M)$$

et ainsi, pour  $x \geq M$ ,

$$0 \leq \frac{f(x)}{x} \leq \frac{f(M)}{x} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

En choisissant  $x \geq \max(1, 2f(M)/\varepsilon)$ , on a alors

$$0 \leq \frac{f(x)}{x} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

On a prouvé que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0.$$

Comme  $u = 1/x$  tend vers  $+\infty$  lorsque  $x$  tend vers  $0+$ , on déduit du théorème de composition de limites que

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = 1.$$

3. On a, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$h(n) = 1$$

et donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} h(n) = 1.$$

De plus, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a aussi

$$h(n+1/2) = \frac{(n+1/2)^{n+1/2}}{n^n} = \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n \sqrt{n+1/2}$$

et donc :

$$h(n+1/2) \geq \sqrt{n+1/2}.$$

Ainsi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} h(n+1/2) = +\infty \neq 1.$$

Comme les deux suites  $(n)_{n \geq 1}$  et  $(n+1/2)_{n \geq 1}$  tendent vers  $+\infty$ , on déduit du critère séquentiel sur les limites que  $h$  n'admet aucune limite en  $+\infty$ .

**Solution 7.**

1. La limite à droite vaut +2, la limite à gauche -2 donc il n'y a pas de limite au point 2.

2. Comme

$$\forall x \neq 0, \frac{x^2 + 2|x|}{x} = x + 2 \text{signe de } x$$

avec  $x \mapsto 2 \text{signe de } x$  bornée, on trouve  $-\infty$ .

3. Comme

$$\forall x \neq 2, \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2} = \frac{x + 2}{x - 1},$$

On trouve 4.

4. Comme

$$\frac{\sin^2(x)}{1 + \cos(x)} = \frac{(2 \sin(x/2) \cos(x/2))^2}{2 \cos^2(x/2)} = 2 \sin^2(x/2),$$

on trouve 2.

5. Pour  $x > -1$ , on a

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1+x^2}}{x} &= \frac{x - x^2}{x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1+x^2})} \\ &= \frac{1-x}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1+x^2}}, \end{aligned}$$

**Solution 8.**

Montrons que a) entraîne b). En remplaçant  $h$  par  $-h$  dans a), nous avons  $\lim_{h \rightarrow 0} (f(x_0 - h) - f(x_0)) = 0$ .

$\lim_{h \rightarrow 0} (f(x_0 + h) - f(x_0 - h)) = \lim_{h \rightarrow 0} (f(x_0 + h) - f(x_0) - (f(x_0 - h) - f(x_0))) = 0$ . Nous avons ainsi montré que

**Solution 9.**

Montrons que a) entraîne b). En remplaçant  $h$  par  $-h$  dans a), nous avons  $\lim_{h \rightarrow 0} (f(x_0 - h) - f(x_0)) = 0$ .

$\lim_{h \rightarrow 0} (f(x_0 + h) - f(x_0 - h)) = \lim_{h \rightarrow 0} (f(x_0 + h) - f(x_0) - (f(x_0 - h) - f(x_0))) = 0$ . Nous avons ainsi montré que

**Solution 10.**

Si  $k = 0$ , nous avons  $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} E(kt)/E(ht) = 0$ . Supposons que  $k \neq 0$  et fixons  $t$  assez grand. Nous avons

$$\frac{E(kt)}{E(ht)} = \frac{E(kt)}{kt} \frac{kt}{ht} \frac{ht}{E(ht)},$$

On a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} E(x)/x = \lim_{y \rightarrow -\infty} E(y)/y = 1$ . En effet c'est une conséquence des "gendarmes" et des inégalités sui-

on trouve ainsi  $\frac{1}{2}$ .

6. Comme pour  $x > -5$ , on a

$$\sqrt{x+5} - \sqrt{x-3} = \frac{2}{\sqrt{x+5} + \sqrt{x-3}},$$

on trouve 0.

7. En utilisant que  $a^3 - 1 = (a - 1)(1 + a + a^2)$  pour  $a = \sqrt[3]{1+x^2}$ , on obtient pour tout  $x \neq 0$ ,

$$\frac{\sqrt[3]{1+x^2} - 1}{x^2} = \frac{1}{1 + a + a^2}.$$

On trouve donc  $\frac{1}{3}$ .

8. L'énoncé n'a de sens que pour  $n \geq 1$ . Pour  $x \neq 1$ , on a

$$\frac{x^n - 1}{x - 1} = \sum_{k=0}^{n-1} x^k$$

Ainsi, on trouve  $\frac{1}{n}$ .

$$\lim_{h \rightarrow 0} (f(x_0 + h) - f(x_0 - h)) = 0.$$

La propriété b) n'entraîne pas en général a), comme le montre l'exemple suivant : on définit  $f$  sur  $\mathbb{R}$  par  $f(t) = 1$ , si  $t \in \mathbb{R}^*$  et  $f(0) = 0$ . La fonction vérifie bien la propriété b) au point 0 mais pas a).

$$\lim_{h \rightarrow 0} (f(x_0 + h) - f(x_0 - h)) = 0.$$

La propriété b) n'entraîne pas en général a), comme le montre l'exemple suivant : on définit  $f$  sur  $\mathbb{R}$  par  $f(t) = 1$ , si  $t \in \mathbb{R}^*$  et  $f(0) = 0$ . La fonction vérifie bien la propriété b) au point 0 mais pas a).

vantes valables pour tous  $x > 0$  et  $y < 0$  :

$$\frac{x-1}{x} < \frac{E(x)}{x} \leq 1, \quad \frac{y-1}{y} > \frac{E(y)}{y} \geq 1.$$

On conclut que

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{E(kt)}{E(ht)} = \frac{k}{h}.$$