

Exercice 1.

- a. Let G be a non-constant complex polynomial function. What is its image?
- b. Let F be a non-constant complex rational function. Show that it takes every complex value with at most one exception. When is F surjective? Injective? Bijective?

Exercice 2.

Déterminer

$$\int \frac{x^4 + 2x^2 - 1}{x^2(x^2 + 1)^2} dx.$$

Exercice 3.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Simplifier l'écriture des sommes

$$A = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}, \quad B = \sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+2)(k+3)(k+4)}.$$

Exercice 4.

Trouver une primitive de la fonction

$$\varphi : \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{4x}{x^4 - 1}.$$

Exercice 5.

On considère les fonctions réelles données par

$$f(x) = \frac{4x}{x-1}, \quad g(x) = \frac{x^3 - 2x}{x^2 - 3x + 2}.$$

Pour chaque fonction déterminer son ensemble de définition, puis trouver une primitive.

(Indication : séparation de la partie polaire, puis décomposition en éléments simples.)

Exercice 6.

Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{C}[X]$ et sur $\mathbb{R}[X]$ les fractions rationnelles suivantes :

- a. $\frac{1}{X^n - 1}$
- b. $\frac{X^{n-1}}{X^n - 1}$
- c. $\frac{1}{(X-1)(X^n - 1)}$

1. Solutions

Solution 1.

Since we work on an infinite field, we don't have to distinguish between polynomials and polynomial functions or between rational expressions and rational functions.

a. The image of G is \mathbb{C} . In fact, if $b \in \mathbb{C}$, then the non-constant polynomial $G - b$ has at least one root in \mathbb{C} .

b. We write $F = G/H$ with two polynomials G and H .

► A complex number b is in the image of F if and only if the polynomial $G - bH$ has a root. But any non-constant complex polynomial has a root. Thus

$$F \text{ is not surjective} \iff \exists a, b \in \mathbb{C}, G = a + bH.$$

► Suppose now that F is not surjective. Take a, b as above. We have

$$F = \frac{G}{H} = \frac{a + bH}{H} = \frac{a}{H} + b.$$

Since F is non-constant, necessarily $a \neq 0$ and the polynomial H is non-constant. According to the preceding question H is surjective, hence the image of a/H is $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. We conclude that the image of F is $\mathbb{C} \setminus \{b\}$.

Solution 2.

La fraction rationnelle $f(x) = \frac{x^4 + 2x^2 - 1}{x^2(x^2 + 1)^2}$ n'a pas de dénominateur scindé sur \mathbb{R} . Mais sur \mathbb{C} on a

$$f(x) = \frac{x^4 + 2x^2 - 1}{x^2(x + i)^2(x - i)^2}.$$

Comme f a un degré plus grand au dénominateur qu'au numérateur, sa partie entière est nulle. Nous remarquons que f est paire, ce qui suggère de comparer les décompositions de $f(x)$ et $f(-x)$.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \frac{b_1}{x - i} + \frac{b_2}{(x - i)^2} + \frac{c_1}{x + i} + \frac{c_2}{(x + i)^2}, \\ f(x) = f(-x) &= -\frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} - \frac{b_1}{x + i} + \frac{b_2}{(x + i)^2} - \frac{c_1}{x - i} + \frac{c_2}{(x - i)^2}. \end{aligned}$$

L'unicité de la décomposition implique que $a_1 = -a_1 = 0$, $b_1 = -c_1$ et $b_2 = c_2$. Ainsi

$$\frac{x^4 + 2x^2 - 1}{x^2(x^2 + 1)^2} = \frac{a_2}{x^2} + \frac{b_1}{x - i} + \frac{b_2}{(x - i)^2} - \frac{b_1}{x + i} + \frac{b_2}{(x + i)^2}.$$

La multiplication par x^2 et l'évaluation en 0 donne $a_2 = -1$.

La multiplication par $(x - i)^2$ et l'évaluation en i donne $b_2 = -1/2$.

Enfin, en multipliant par $x^2 + 1$ on obtient

$$\frac{x^4 + 2x^2 - 1}{x^2(x^2 + 1)} = 2ib_1 - \frac{x^2 + 1}{x^2} - \frac{x + i}{2(x - i)} - \frac{x - i}{2(x + i)}.$$

Le passage à la limite en $+\infty$ donne $1 = 2ib_1 - 2$, donc $b_1 = -3i/2$. Ainsi

$$\begin{aligned} f(x) &= -\frac{1}{x^2} - \frac{3i}{2(x - i)} - \frac{1}{2(x - i)^2} + \frac{3i}{2(x + i)} - \frac{1}{2(x + i)^2} \\ &= -\frac{1}{x^2} + \frac{3}{x^2 + 1} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{(x - i)^2} + \frac{1}{(x + i)^2} \right). \end{aligned}$$

Donc

$$\int f(x) dx = \frac{1}{x} + 3 \arctan x + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x - i} + \frac{1}{x + i} \right) + C = \frac{1}{x} + 3 \arctan x + \frac{x}{x^2 + 1} + C.$$

► Suppose that F is injective. Then for every $y \in \mathbb{C}$ the polynomial $G - yH$ has at most one root. This means that there exists a polynomial $P(X, Y) \in \mathbb{C}[X, Y]$ of degree 1 in X such that

$$G(X) - YH(X) = P(X, Y)^n, \text{ with } n \in \mathbb{N}.$$

Looking at the degree in Y we see that necessarily $n = 1$. Thus $G(X) - YH(X)$ has degree 1 in X . This is only possible if $\deg G \leq 1$ and $\deg H \leq 1$, the case $\deg G = \deg H = 0$ being excluded. Therefore, if F is injective then it is necessarily of the form

$$F(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta},$$

and, since F is not constant, we have $\det \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \neq 0$. Conversely, any such function is injective.

► Combining the conditions about injectivity and surjectivity we conclude that the only bijective rational functions are the polynomials of degree 1.

Solution 3.

En décomposant les fractions rationnelles on trouve :

$$\begin{aligned}
 A &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} \\
 &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} = 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} - \left(\sum_{k=2}^n \frac{1}{k} + \frac{1}{n+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B &= \sum_{k=1}^n \left(-\frac{1}{k+2} + \frac{3}{k+3} - \frac{2}{k+4} \right) = -\sum_{k=1}^n \frac{1}{k+2} + 3\sum_{k=1}^n \frac{1}{k+3} - 2\sum_{k=1}^n \frac{1}{k+4} \\
 &= -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+3} + 3\sum_{k=1}^n \frac{1}{k+3} - 2\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k+3} \\
 &= -\left(\frac{1}{3} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+3} - \frac{1}{n+3} \right) + 3\sum_{k=1}^n \frac{1}{k+3} - 2\left(-\frac{1}{4} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+3} + \frac{1}{n+4} \right) = \frac{1}{6} + \frac{1}{n+3} - \frac{2}{n+4}.
 \end{aligned}$$

Solution 4.

On pose $Q = \frac{4X}{X^4 - 1}$. On sait que Q possède les quatre pôles simples $\pm 1, \pm i$. Il existe donc des complexes (non-nuls) a, b, c, d tels que

$$Q = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X+1} + \frac{c}{X-i} + \frac{d}{X+i}.$$

(La partie entière est nulle car $\deg Q$ est négatif.) En multipliant avec $X - 1$ puis en remplaçant $X = 1$ on trouve $a = 1$. De manière analogue on procède pour b, c, d . Enfin on trouve

$$\frac{4X}{X^4 - 1} = \frac{1}{X-1} + \frac{1}{X+1} - \frac{1}{X-i} - \frac{1}{X+i}.$$

En rassemblant les termes conjugués ci-dessus, on obtient

$$\varphi(x) = \frac{2x}{x^2 - 1} - \frac{2x}{x^2 + 1}.$$

Donc

$$\Phi(x) = \ln |x^2 - 1| - \ln(x^2 + 1) = \ln \frac{|x^2 - 1|}{x^2 + 1}$$

est une primitive de φ sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

Solution 5.

La fonction f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. On obtient une primitive F comme suit.

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{4x}{x-1} = 4 \frac{(x-1)+1}{x-1} = 4 \left(1 + \frac{1}{x-1} \right) \\
 F(x) &= 4(x + \ln |x-1|)
 \end{aligned}$$

La fonction g est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$. On sépare sa partie entière de sa partie polaire par une division polynomiale.

$$\begin{array}{r}
 x+3 \\
 x^2 - 3x + 2 \overline{) \quad x^3 \quad - 2x} \\
 \underline{-x^3 + 3x^2 - 2x} \\
 3x^2 - 4x \\
 \underline{-3x^2 + 9x - 6} \\
 5x - 6
 \end{array}$$

Donc

$$g(x) = \frac{x^3 - 2x}{(x-1)(x-2)} = x + 3 + \frac{5x-6}{(x-1)(x-2)}.$$

D'après le théorème de la décomposition en éléments simples il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que

$$\frac{5x-6}{(x-1)(x-2)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2}.$$

On trouve $a = 1$ et $b = 4$. On obtient donc une primitive G comme suit.

$$g(x) = x + 3 + \frac{1}{x-1} + \frac{4}{x-2}$$

$$G(x) = \frac{x^2}{2} + 3x + \ln |x-1| + 4 \ln |x-2|$$

Solution 6.

a. Les pôles sont les racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité et ils sont simples donc :

$$\frac{1}{X^n - 1} = \sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \frac{a_\omega}{X - \omega}$$

avec

$$a_\omega = \frac{1}{(X^n - 1)'(\omega)} = \frac{1}{n\omega^{n-1}} = \frac{\omega}{n}$$

b. De la même façon,

$$\frac{X^{n-1}}{X^n - 1} = \sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \frac{a_\omega}{X - \omega}$$

avec

$$a_\omega = \frac{X^{n-1}(\omega)}{(X^n - 1)'(\omega)} = \frac{\omega^{n-1}}{n\omega^{n-1}} = \frac{1}{n}$$

c. Les pôles sont les racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité. Pour $\omega \in \mathbb{U}_n \setminus \{1\}$, le pôle ω est simple donc le coefficient de $\frac{1}{X - \omega}$ dans la décomposition en éléments simples est :

$$\begin{aligned} a_\omega &= \frac{1}{[(X - 1)(X^n - 1)]'(\omega)} \\ &= \frac{1}{(X^n - 1 + n(X - 1)X^{n-1})(\omega)} = \frac{\omega}{n(\omega - 1)} \end{aligned}$$

Notons a_1 et b_1 les coefficients respectifs de $\frac{1}{X - 1}$ et $\frac{1}{(X - 1)^2}$ dans la décomposition en éléments simples. On remarque que

$$\frac{1}{(X - 1)(X^n - 1)} = \frac{1}{(X - 1)^2(1 + X + \dots + X^{n-1})}$$

donc en multipliant par $(X - 1)^2$ et en prenant la valeur en 1, on obtient $b_1 = \frac{1}{n}$. Enfin, on obtient a_1 en dérivant

$\frac{1}{1 + X + \dots + X^{n-1}}$ et en prenant la valeur en 1 :

$$a_1 = -\frac{1 + 2 + \dots + (n - 1)}{n^2} = \frac{1 - n}{2n}$$