Exercice 1.

Sei K ein Körper. Bestimme alle Automorphismen der K-Algebra $K[X]$.

Exercice 2.

Pour $p, n \in \mathbb{N}$ on pose $f_p(n) = \sum_{k=1}^{n} k^p$.

1. Donner des expressions plus simples de $f_0(n)$ et $f_1(n)$.

2. Montrer que $f_2(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. Montrer que f_p est un polynôme en n, de degré $p+1$ et à coefficients rationnels.

Exercice 3.

Donner un exemple d'une fonction polynomiale $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de degré 3 dont la courbe n'admet pas de tangente horizontale. Généraliser à tout degré impair plus grand que 1.

Exercice 4.

L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse ?

Pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$ avec $n = \deg P$ il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que « polynôme translaté » $Q = P(X+\alpha)$ s'écrit $Q = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec $a_{n-1} = 0$.

Exercice 5.

Résoudre dans $\mathbb{C}$ le système suivant :

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 9 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1 \end{cases}$$

Exercice 6.

Soient $m \in \mathbb{N}^*$, $a \in \mathbb{K}$ et P un polynôme non-nul à coefficients dans $\mathbb{K}$. Montrer que les deux assertions sont équivalentes.

1. $P(a) = P'(a) = \cdots = P^{(m-1)}(a) = 0 \neq P^{(m)}(a)$.

2. Il existe un polynôme Q tel que $Q(a) \neq 0$ et $P(X) = (X-a)^m Q(X)$.

Si l'une des ces conditions est vérifiée on dit alors que a est une racine de multiplicitié m de P.

Exercice 7.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}^*$ et $P = (X+1)^n - e^{2ina} \in \mathbb{C}[X]$.

1. Trouver les racines de P, puis factoriser P.

2. En déduire la valeur de $\prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(a + \frac{k\pi}{n}\right)$

Exercice 8.

On considère dans $\mathbb{R}[X]$ les deux équations suivantes,

$$\begin{aligned} (\mathbf{E}) &\ : (X^2+1)P'' + 4P' - 2P = 0 \\ (\mathbf{E}') &\ : (X^2+1)P'' + 4P' - 2P = X \end{aligned}$$

1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ non nul. Montrer que, si $\deg(P) \neq 2$, alors

$$\deg((X^2+1)P'' + 4P' - 2P) = \deg(P).$$

2. Résoudre $(\mathbf{E})$.

3. Rechercher une solution particulière P_0 de $(\mathbf{E}')$ et en déduire l'ensemble des solutions de $(\mathbf{E}')$.

Exercice 9.

Déterminer les polynômes P de $\mathbb{K}[X]$ vérifiant $P(X+1) = P(X)$.

1. Solutions

Solution 1.

Sei $\Phi : K[X] \longrightarrow K[X]$ ein Algebra-Automorphismus. Für ein beliebiges Polynom $\sum_n a_n X^n$ ist

$$\Phi\left(\sum_n a_n X^n\right) = \sum_n a_n \Phi\left(X^n\right) = \sum_n a_n \Phi(X)^n .$$

Es gilt also

$$\forall\, P \in K[X] \ : \quad \deg(\Phi(P)) = \deg(\Phi(X))\deg(P) .$$

Da Φ bijektiv ist, gibt es ein Polynom Q, so dass $\Phi(Q) = X$. Insbesondere gilt $1 = \deg(\Phi(X))\deg(Q)$, also $\deg(\Phi(X)) = 1$. Somit ist $\Phi(X) = aX + b$ mit $a \in K^*, b \in K$. Der Automorphismus Φ hat folglich die Form

$$P \longmapsto \Phi(P) = P(aX + b) .$$

Umgekehrt prüft man leicht nach, dass jede solche Abbildung ein Automorphismus ist.

Solution 2.

1. On voit facilement que

$$f_0(n) = \sum_{k=1}^{n} 1 = n, \qquad f_1(n) = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} .$$

2. Simple preuve par récurrence sur n.

3. On fait une récurrence sur p. Dans les questions précédentes a déjà vu que l'énoncé est vrai pour $p = 0, 1, 2$. Par hypothèse de récurrence on suppose que l'énoncé est vrai pour $0, 1, \ldots, p$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(k+1)^{p+2} &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=0}^{p+2}\binom{p+2}{j}k^j = \sum_{j=0}^{p+2}\binom{p+2}{j}\sum_{k=1}^{n}k^j \\ &= \sum_{k=1}^{n}k^{p+2} + (p+2)\sum_{k=1}^{n}k^{p+1} + \underbrace{\sum_{j=0}^{p}\binom{p+2}{j}\sum_{k=1}^{n}k^j}_{P(n)}\end{aligned}$$

avec $P(n)$ un polynôme rationnel de degré $p+1$ d'après l'hypothèse de récurrence. Alors

$$\sum_{k=1}^{n}k^{p+1} = \frac{1}{p+2}\left(\sum_{k=1}^{n}(k+1)^{p+2} - \sum_{k=1}^{n}k^{p+2} - P(n)\right) = \frac{1}{p+2}\left((n+1)^{p+2} - 1 - P(n)\right) .$$

Donc $f_{p+1}(n)$ est bien un polynôme rationnel de degré $p+2$.
En plus, cette preuve nous apprend que le coefficient dominant est toujours l'inverse du degré.

Solution 3.

On cherche une fonction polynomiale f de degré 3 telle que $f'(x) \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Si on part de $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$ on voit que $f(x) = x^3 + x$ fait l'affaire.

Plus généralement on peut prendre $f(x) = x^{2k+1} + x^{2k-1} + \cdots + x$.

Solution 4.

Rappelons que le coefficient de degré $n-1$ d'un polynôme normé de degré n est l'opposé de la somme des racines du polynôme. Cela se voit facilement en développant le produit $(X - x_1)(X - x_2)\cdots(X - x_n)$.
Si $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ désignent les racines de P (comptées avec multiplicités), alors les racines de $Q = P(x + \alpha)$ sont $\alpha_1 - \alpha, \ldots, \alpha_n - \alpha$. Il suffit donc de prendre

$$\alpha = \frac{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}{n} ,$$

pour assurer que la somme des racines de Q soit nulle.

Solution 5.

Notons σ_k les fonctions symétriques élémentaires associées à x, y, z. On reprend la notation S_k des sommes de Newton. Le système s'écrit alors

$$S_1 = 1, \ \ S_2 = 9, \ \ \frac{\sigma_2}{\sigma_3} = 1.$$

On a les relations

$$S_1 = \sigma_1,$$

puis

$$S_2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2.$$

On en déduit sans peine les formules *inverses*,

$$\sigma_1 = S_1,$$

puis

$$\sigma_2 = \frac{1}{2}(S_1^2 - S_2).$$

Du fait de cette *inversibilité* des formules, le système de l'énoncé est équivalent à

$$\sigma_1 = 1, \ \ \sigma_2 = -4, \ \ \sigma_3 = \sigma_2 = -4,$$

ie x, y, z sont racines du polynôme

$$P = X^3 - X^2 - 4X + 4 = (X-1)(X-2)(X+2).$$

Solution 6.

► Nous traitons d'abord le cas $a = 0$. On écrit

$$P = a_n X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

Alors on montre par une récurrence facile que

$$\forall\, k \in \mathbb{N} \ : \quad P^{(k)}(0) = k! a_k \,.$$

Ainsi la condition **1.** équivaut à

$$a_0 = a_1 = \cdots = a_{m-1} = 0 \neq a_m$$

ou encore à

$$P = a_n X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_m X^m, \quad a_m \neq 0.$$

Autrement dit, dans P on peut factoriser X précisément m fois,

$$P = X^m \left(a_n X^{n-m} + a_{n-1}X^{n-m-1} + \cdots + a_m\right).$$

Cela n'est rien d'autre que la condition **2.**

► Dans le cas général on pose $F(X) = P(X + a)$. Ainsi la condition

$$P(a) = P'(a) = \cdots = P^{(m-1)}(a) = 0 \neq P^{(m)}(a)$$

équivaut à

$$F(0) = F'(0) = \cdots = F^{(m-1)}(0) = 0 \neq F^{(m)}(0).$$

Nous avons vu que cela équivaut à l'existence d'un polynôme G tel que $F(X) = X^m G(X)$ et $G(0) \neq 0$. En posant $Q(X) = G(X - a)$ nous obtenons donc $P(X) = (X - a)^m Q(X)$ avec $Q(a) \neq 0$.

Solution 7.

1. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ on a

$$\begin{aligned}
P(z) = 0 \ &\iff \ (z+1)^n = e^{2ina} \\
&\iff \ z + 1 = e^{2ia} e^{2ik\pi/n} \\
&\iff \ z = e^{2i(a+k\pi/n)} - 1 \\
&\iff \ z = \left(e^{i(a+k\pi/n)} - e^{-i(a+k\pi/n)}\right) e^{i(a+k\pi/n)} \\
&\iff \ z = z_k := 2i\sin(a + k\pi/n) e^{i(a+k\pi/n)},
\end{aligned}$$

où $k \in [\![0, n-1]\!]$. On voit facilement que $z_k \neq z_j$ pour tout $(k, j) \in [\![0, n-1]\!]^2$ avec $k \neq j$. Comme P est de degré n cela signifie que nous avons trouvé toutes les n racines de P et qu'elles sont simples. D'où la factorisation

$$P = \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - 2i \sin\left(a + \frac{k\pi}{n}\right) e^{i(a+k\pi/n)} \right).$$

2. Posons $\beta = \prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(a + \frac{k\pi}{n}\right)$. D'une part

$$P(0) = 1 - e^{2ina}$$

et d'autre part

$$\begin{aligned}
P(0) &= \prod_{k=0}^{n-1} \left(-2i \sin\left(a + \frac{k\pi}{n}\right) e^{i(a+k\pi/n)} \right) \\
&= (-2i)^n \beta \prod_{k=0}^{n-1} \exp\left(i\left(a + k\frac{\pi}{n}\right)\right) \\
&= (-2i)^n \beta \exp\left(i \sum_{k=0}^{n-1} \left(a + k\frac{\pi}{n}\right)\right) \\
&= (-2i)^n \beta \exp\left(i\left(na + (n-1)\frac{\pi}{2}\right)\right) \\
&= (-2i)^n \beta e^{ina} i^{n-1} = -i2^n \beta e^{ina}.
\end{aligned}$$

Donc en combinant les deux

$$\prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(a + \frac{k\pi}{n}\right) = \frac{e^{2ina} - 1}{i2^n e^{ina}} = \frac{\sin(na)}{2^{n-1}}.$$

Solution 8.

1. Notons pour tout polynôme P,

$$\varphi(P) = (X^2+1)P'' + 4P' - 2P$$

et $n = \deg(P)$. L'application φ est clairement un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$. Les solutions de $(\mathbf{E})$ sont *exactement* les éléments de $\operatorname{Ker}(\varphi)$.

▶ Si $n = -\infty$, $\varphi(P)$ est clairement de degré $-\infty$.

▶ Si $n = 0$, $\varphi(P) = -2P$ est aussi de degré 0.

▶ Si $n = 1$, $\varphi(P) = 4P' - 2P$ est aussi de degré 1.

▶ Supposons $n \geqslant 3$. Notons p_n le cœfficient dominant de P. Le polynôme

$$(X^2+1)P''$$

est de degré n et de cœfficient dominant $n(n-1)p_n$; le polynôme $4P'$ est de degré $n-1$ et $2P$ de degré n, son cœfficient dominant valant $2p_n$. Puisque $n \geqslant 3$

$$p_n(n^2 - n - 2) = p_n(n+1)(n-2) \neq 0$$

et donc $\varphi(P)$ est de degré n.

2. D'après la question précédente, une éventuelle solution non nulle de $(\mathbf{E})$ est *nécessairement* de degré 2. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ et

$$P = aX^2 + bX + c.$$

Après tout calcul, P est solution de l'équation $(\mathbf{E})$ *si et seulement si*

$$\varphi(P) = (8a - 2b)X + 2a + 4b - 2c = 0,$$

ie $b = 4a$ et $c = a + 2b$, ainsi

$$P = a(X^2 + 4X + 9).$$

Notons $\Gamma = X^2 + 4X + 9$. L'ensemble des solutions de $(\mathbf{E})$ est

$$\operatorname{vect}(\Gamma).$$

3. Il s'agit d'une équation linéaire.

▶ Le résultat de la première question nous incite à rechercher une solution particulière de $(\mathbf{E}')$ de degré un ou deux. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et

$$P_0 = aX + b.$$

P_0 est une solution de $(\mathbf{E}')$ *si et seulement si*

$$\varphi(P_0) = -2aX + 4a - 2b = X,$$

c'est-à-dire

$$a = -\frac{1}{2} \text{ et } b = -1.$$

▶ Un polynôme P est solution de $(\mathbf{E}')$ *si et seulement si*

$$\varphi(P) = X = \varphi(P_0),$$

ie

$$\varphi(P - P_0) = 0,$$

soit encore $P - P_0 \in \operatorname{Ker}(\varphi)$. Les solutions de $(\mathbf{E}')$ sont donc les polynômes de la forme

$$-\frac{X}{2} - 1 + a\Gamma, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Solution 9.

Soit P un tel polynôme et $Q = P - P(0)$. On prouve sans peine que $Q(X+1) = Q(X)$ et $Q(0) = 0$. On en déduit par une récurrence immédiate que $\forall n \in \mathbb{N}\,,\, Q(n) = 0$. Le polynôme Q admet donc une infinité de racines : $Q = 0$ et donc P est constant. Réciproquement, il est clair qu'un polynôme P constant vérifie $P(X+1) = P(X)$.