Exercice 1.

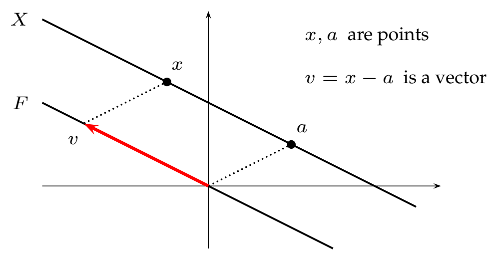
Let E be a $\mathbb{K}$-vector space and $X \subset E$. Show that the following three conditions are equivalent.

1. $X = \varnothing$ or there exists a point $a \in E$ and a subvector space $F \subset E$ such that $X = a + F$.

2. There exists a $\mathbb{K}$-vector space E', a point $b \in E'$ and a linear map $f : E \to E'$ such that $X = f^{-1}(\{b\})$.

3. For any two distinct points in X the line passing through these points lies in X.

Remark. — A subset $X \subset E$ which satisfies any of these conditions is called an *affine subspace of* E.



Exercice 2.

Let V, W be K-vector spaces, $f \in \mathscr{L}(V, W)$, $0 \leqslant m \leqslant n$ and let $(v_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ be a free family of vectors in V such that $(v_k)_{1 \leqslant k \leqslant m}$ is a basis of $\mathrm{Ker}(f)$. Prove that the family $(f(v_k))_{m+1 \leqslant k \leqslant n}$ is free.

Exercice 3.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et A une partie finie de $GL(E)$ stable par composition. On pose $p = \dfrac{1}{|A|} \sum_{f \in A} f$. Montrer que p est un projecteur.

Exercice 4.

Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension n, F un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et $u, v \in \mathscr{L}(E, F)$.

1. Montrer que

$$|\operatorname{rg}(u) - \operatorname{rg}(v)| \leqslant \operatorname{rg}(u+v) \leqslant \operatorname{rg}(u) + \operatorname{rg}(v).$$

2. Prouver que $\operatorname{rg}(u+v) = \operatorname{rg}(u) + \operatorname{rg}(v)$ *si et seulement si*

$$\operatorname{Im}(u) \cap \operatorname{Im}(v) = \{0\} \text{ et } \operatorname{Ker}(u) + \operatorname{Ker}(v) = E.$$

Montrer que dans ce cas,

$$\operatorname{Ker}(u+v) = \operatorname{Ker}(u) \cap \operatorname{Ker}(v).$$

Exercice 5.

Soit A une $\mathbb{R}$-algèbre commutative, intègre et de dimension finie. Montrer que A est un corps.

Exercice 6.

Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. f est surjective ;

2. pour toute famille génératrice $(v_j)_{j \in J}$ de E la famille $(f(v_j))_{j \in J}$ est génératrice de F ;

3. pour toute base $(b_j)_{j \in J}$ de E la famille $(f(b_j))_{j \in J}$ est génératrice de F ;

4. il existe une base $(b_j)_{j \in J}$ de E telle que $(f(b_j))_{j \in J}$ est génératrice de F ;

5. il existe une famille génératrice $(v_j)_{j \in J}$ de E telle que $(f(v_j))_{j \in J}$ est génératrice de F.

Exercice 7.

On pose dans $E = \mathbb{R}^3$,

$$u_1 = (1,2,1), \quad u_2 = (-2,-4,-2), \quad u_3 = (1,1,3)$$

et $u_4 = (2,3,4)$. Déterminer une base de

$$\operatorname{vect}(u_1, u_2, u_3, u_4).$$

Exercice 8.

Que pensez-vous de la proposition suivante,

« Si $m < n$ alors $\mathbb{R}^m$ est un s.e.v. de $\mathbb{R}^n$ » ?

Corrigez-la.

Exercice 9.

Soit E le sous-ensemble de $\mathbb{R}^4$ défini par les équations suivantes,

$$x = 2y - z \ , \ t = x + y + z.$$

Prouver que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$. Quelle est sa dimension ? En donner une base.

1. Solutions

Solution 1.

1) $\Rightarrow$ **2)** If X is empty, then $f : E \to \mathbb{K}, v \mapsto 0$, is a linear map such that $X = f^{-1}(\{1\})$.
Now suppose that $X = a + F$ with a point $a \in E$ and a subvector space $F \subset E$. Let $f : E \to E/F$ be the canonical projection on the quotient space, and let $b = a + F \in E/F$. Then $X = b = f^{-1}(\{b\})$.

If you don't like quotient spaces, then proceed as follows. There exists a subvector space $F' \subset E$ such that $E = F \oplus F'$. Let $f : E \to F'$ be the projection on F' parallel to F and let $b = f(a)$. Then one shows easily that $X = f^{-1}(\{b\})$.

2) $\Rightarrow$ **3)** Suppose that $X = f^{-1}(\{b\})$ where $f : E \to E'$ is a linear map and $b \in E'$. If $X = \varnothing$ there is nothing to prove. So pick a point $a \in X$. We will now prove that $X = a + \operatorname{Ker}(f)$.
► Let $x \in a + \operatorname{Ker}(f)$. Then there exists a vector $v \in \operatorname{Ker}(f)$ such that $x = a + v$. So $f(x) = f(a + v) = f(a) + f(v) = f(a) = b$, hence $x \in f^{-1}(\{b\})$.
► Let $x \in X$. Then $f(x) = b = f(a)$, hence $f(x - a) = 0$ and therefore the vector $v = x - a$ is in $\operatorname{Ker}(f)$. It follows that $x = a + v \in a + \operatorname{Ker}(f)$.
We know that $\operatorname{Ker}(f)$ is a subvector space of E and therefore contains with two distinct points also the line passing through them. This property is clearly preserved under the translation $v \mapsto a + v$, and therefore holds for $X = a + \operatorname{Ker}(f)$ as well.

3) $\Rightarrow$ **1)** Suppose that for any two distinct points in X the line passing through these points also lies in X. Then the same property holds for the translated set

$$F = X - a = \{v \in E \mid \exists x \in X, v = x - a\},$$

where a is an arbitrarily fixed point in X. (If there exists no $a \in X$ this means that $X = \varnothing$ and we are done.) All we have to prove now is that F is a subvector space of E.
► It is clear that $0 \in F$.
► Let $\lambda \in \mathbb{K}$ and $v \in F$. Then $\lambda v \in F$ because it is on the line passing through 0 and v.
► Let $u, v \in F$. Then $\frac{1}{2}(u + v) \in F$ because it is on the line passing through u and v. It follows that $u + v = 2\left(\frac{1}{2}(u + v)\right) \in F$ since it is on the line passing through 0 and $\frac{1}{2}(u + v)$.

Remark. — The proof relies heavily on the fact that $2 \neq 0$. In fact, if E is a vector space over the field $\mathbb{F}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ of characteristic 0, then the property **3.** is satisfied by any subset $X \subset E$ (the reason being that lines consist of two points only). For example in $E = \mathbb{F}_2^2$ the subset $X = \{(0,1), (1,1), (1,0)\}$ satisfies condition **3.** but not **1.**

Solution 2.

Let $\displaystyle\sum_{m+1\leqslant k\leqslant n} \lambda_k f(v_k) = 0$ with $\lambda_k \in K$. By linearity

$$f\left(\sum_{m+1\leqslant k\leqslant n} \lambda_k v_k\right) = 0$$

and therefore $\displaystyle\sum_{m+1\leqslant k\leqslant n} \lambda_k v_k$ is in the kernel of f. Since $(v_k)_{1\leqslant k\leqslant m}$ is a basis of $\operatorname{Ker}(f)$, there exist $\mu_1, \dots, \mu_m \in K$ such that

$$\sum_{m+1\leqslant k\leqslant n} \lambda_k v_k = \sum_{1\leqslant k\leqslant m} \lambda_k v_k.$$

With $\lambda_k = -\mu_k$ for $k = 1, \dots, m$ it follows that

$$\sum_{1\leqslant k\leqslant n} \lambda_k v_k = 0.$$

Since $(v_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ is a free, we get $\lambda_k = 0$ for all $k = 1, \dots, n$. This proves that $(f(v_k))_{m+1\leqslant k\leqslant n}$ is free.

Solution 3.

$$p^2 = \frac{1}{|A|^2} \sum_{g\in A} \sum_{f\in A} g \circ f$$

Fixons g dans A et remarquons que l'application

$$\begin{aligned} \phi_g : A &\longrightarrow A \\ f &\longmapsto g \circ f \end{aligned}$$

est bien définie puisque par stabilité de A, $g \circ f \in A$ pour tous $f, g \in A$. ϕ_g est injective car g est inversible. Comme les ensembles de départ et d'arrivée sont de même cardinal fini, ϕ_g est bijective et

$$\sum_{f\in A} g \circ f = \sum_{f\in A} f.$$

Et donc $p^2 = p$.

Solution 4.

1. Puisque

$$\mathrm{Im}(u+v)=(u+v)(E)\subset \mathrm{Im}(u)+\mathrm{Im}(v)$$

on a

$$\mathrm{rg}(u+v)\leqslant \dim(\mathrm{Im}(u)+\mathrm{Im}(v)),$$

Or ,

$$\dim(\mathrm{Im}(u)+\mathrm{Im}(v))\leqslant \dim(\mathrm{Im}(u))+\dim(\mathrm{Im}(v))$$

donc

$$\mathrm{rg}(u+v)\leqslant \mathrm{rg}(u)+\mathrm{rg}(v).$$

En appliquant l'inégalité précédente à $u+v$ et $-v$, on obtient

$$\mathrm{rg}(u)=\mathrm{rg}(u+v-v)\leqslant \mathrm{rg}(u+v)+\mathrm{rg}(v)$$

c'est-à-dire

$$\mathrm{rg}(u)-\mathrm{rg}(v)\leqslant \mathrm{rg}(u+v).$$

Les endomorphismes u et v jouant des rôles symétriques, on a aussi

$$\mathrm{rg}(v)-\mathrm{rg}(u)\leqslant \mathrm{rg}(u+v)$$

et donc

$$|\,\mathrm{rg}(u)-\mathrm{rg}(v)|\leqslant \mathrm{rg}(u+v).$$

Remarque – $\mathrm{Im}(-v)=\mathrm{Im}(v)$, *d'où* $\mathrm{rg}(-v)=\mathrm{rg}(v)$. *Plus généralement, pour tout* $\lambda\in\mathbb{K}^*, \mathrm{Im}(\lambda v)=\mathrm{Im}(v)$ *; les lecteurs les plus sceptiques* se doivent *d'en écrire la démonstration !*

2. On a l'égalité $\mathrm{rg}(u+v)=\mathrm{rg}(u)+\mathrm{rg}(v)$ *si et seulement si* les inégalités de la question **1.** sont en fait des égalités, c'est-à-dire

$$\mathrm{Im}(u+v)=\mathrm{Im}(u)+\mathrm{Im}(v)\ \text{ et }\ \mathrm{Im}(u)\cap\mathrm{Im}(v)=\{0\}.$$

▶ Supposons $\mathrm{Im}(u)\cap\mathrm{Im}(v)=\{0\}$ et $\mathrm{Ker}(u)+\mathrm{Ker}(v)=E$. Alors

$$\mathrm{Ker}(u+v)=\mathrm{Ker}(u)\cap\mathrm{Ker}(v),$$

puisque si $x\in\mathrm{Ker}(u+v)$,

$$u(x)=v(-x)\in\mathrm{Im}(u)\cap\mathrm{Im}(v)=\{0\},$$

l'autre inclusion étant banale. On a alors

$$\dim(\mathrm{Ker}(u)+\mathrm{Ker}(v))=\dim(E),$$

et donc,

$$\begin{aligned}\dim(E) &= \dim(\mathrm{Ker}(u))+\dim(\mathrm{Ker}(v))\\ &\qquad -\dim(\mathrm{Ker}(u)\cap\mathrm{Ker}(v))\\ &= \dim(\mathrm{Ker}(u))+\dim(\mathrm{Ker}(v))\\ &\qquad -\dim(\mathrm{Ker}(u+v))\end{aligned}$$

et en appliquant la formule du rang à $u+v$, u et v,

$$\begin{aligned}\dim(E) &= \dim(\mathrm{Ker}(u))+\dim(\mathrm{Ker}(v))\\ &\qquad -\dim(E)+\dim(\mathrm{Im}(u+v))\\ &= \dim(E)-\mathrm{rg}(u)+\dim(E)-\mathrm{rg}(v)\\ &\qquad -\dim(E)-\mathrm{rg}(u+v)\\ &= \dim(E)-\mathrm{rg}(u)-\mathrm{rg}(v)\\ &\qquad +\mathrm{rg}(u+v)\end{aligned}$$

Ainsi

$$\mathrm{rg}(u+v)=\mathrm{rg}(u)+\mathrm{rg}(v).$$

▶ *Réciproquement*, supposons que $\mathrm{rg}(u+v)=\mathrm{rg}(u)+\mathrm{rg}(v)$. D'après ce qui précède,

$$\mathrm{Im}(u+v)=\mathrm{Im}(u)+\mathrm{Im}(v),$$

et $\mathrm{Im}(u)\cap\mathrm{Im}(v)=\{0\}$, on montre comme précédemment que

$$\mathrm{Ker}(u+v)=\mathrm{Ker}(u)\cap\mathrm{Ker}(v).$$

En appliquant les formules de Grassmann et du rang (à u, v et $u+v$), en posant

$$F=\mathrm{Ker}(u)+\mathrm{Ker}(v),$$

on aboutit à,

$$\begin{aligned}\dim(F) &= \dim(\mathrm{Ker}(u))+\dim(\mathrm{Ker}(v))\\ &\qquad -\dim(\mathrm{Ker}(u)\cap\mathrm{Ker}(v))\\ &= 2\dim(E)-\mathrm{rg}(u)-\mathrm{rg}(v)\\ &\qquad -\dim(E)+\dim(\mathrm{Im}(u+v))\\ &= \dim(E)\end{aligned}$$

et donc

$$\mathrm{Ker}(u)+\mathrm{Ker}(v)=E.$$

Solution 5.

Il faut montrer que tout élément non-nul de A est inversible. Soit $a\in A\setminus\{0\}$. L'application

$$\varphi_a\ :\ A\longrightarrow A,\quad b\longmapsto ab,$$

est linéaire. Si $b\in\ker\varphi_a$ alors $ab=0$ et comme A est intègre cela implique que $b=0$. Donc le noyeau de φ_a est nul. L'endomorphisme φ_a est alors injectif, et même bijectif car A est de dimension finie. En particulier il existe $b\in A$ tel que $ab=1$. Donc a est inversible.

Solution 6.

1) $\Rightarrow$ **2)** Soit f surjective et soit $(v_j)_{j\in J}$ une famille génératrice de E. Montrons que la famille $(f(v_j))_{j\in J}$ est génératrice de F. Soit $u \in F$ arbitraire. Alors il existe $v \in E$ tel que $u = f(v)$. On écrit $v = \sum_{j\in J} \lambda_j v_j$ avec une famille presque nulle de coefficients. Alors $u = f(v) = f\left(\sum_{j\in J} \lambda_j v_j\right) = \sum_{j\in J} \lambda_j f(v_j)$. **2)** $\Rightarrow$ **3)** Toute base est génératrice.
3) $\Rightarrow$ **4)** Tout espace vectoriel possède une base.
4) $\Rightarrow$ **5)** Toute base est génératrice.
5) $\Rightarrow$ **1)** Soit $(v_j)_{j\in J}$ une famille génératrice de E telle que $(f(v_j))_{j\in J}$ est génératrice de F. Soit $u \in F$. Nous pouvons écrire u comme combinaison linéaire de la forme $u = \sum_{j\in J} \lambda_j f(v_j)$. Posons $v = \sum_{j\in J} \lambda_j v_j \in E$. Alors on a $f(v) = f\left(\sum_{j\in J} \lambda_j v_j\right) = \sum_{j\in J} \lambda_j f(v_j) = u$ ce qui montre la surjectivité de f.

Solution 7.

Notons S le système de vecteurs étudié. Puisque $u_2 = -2u_1$,

$$\mathrm{vect}(S) = \mathrm{vect}(u_1, u_3, u_4).$$

De même , $u_4 = u_1 + u_3$ donc

$$\mathrm{vect}(S) = \mathrm{vect}(u_1, u_3).$$

Les vecteurs u_1 et u_3 n'étant pas colinéaires , S est de rang 2 , de base (u_1, u_3).

Solution 8.

C'est (horriblement) FAUX ! $\mathbb{R}^m$ n'est même pas contenu dans $\mathbb{R}^n$ …En revanche, il est évident que $\mathbb{R}^m \times \{0\}^{n-m}$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^n$.

Solution 9.

On a

$$E = \left\{(2y - z, y, z, 3y) \mid y, z \in \mathbb{R}\right\},$$

donc en posant $u = (2, 1, 0, 3)$ et $v = (-1, 0, 1, 0)$, on a $E = \mathrm{vect}(u, v)$ donc E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$. La famille (u, v) étant clairement libre , E est de dimension 2 et de base $\mathscr{B} = (u, v)$.