

Exercice 1.

Etudier la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{4 + 3u_n}.$$

Exercice 2.

On pose, pour tout $n \geq 0$, $u_n = (\sqrt{2} - 1)^n$.

1. Montrer qu'il existe deux suites d'entiers relatifs $(a_n)_{n \geq 0}$ et $(b_n)_{n \geq 0}$ telles que, $\forall n \geq 0$

$$u_n = a_n + b_n \sqrt{2}.$$

2. Montrer qu'une suite d'entiers relatifs est convergente *si et seulement si* elle est stationnaire.

3. En déduire que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Exercice 3.

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite réelle bornée telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[u_n + \frac{u_{2n}}{2} \right] = 1.$$

Montrer que $(u_n)_{n \geq 0}$ converge vers $2/3$.

Exercice 4.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombre réels positifs. Pour tout $n \geq 0$, on pose

$$v_n = \frac{u_n}{1 + u_n}.$$

Prouver que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0 *si et seulement si* $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

Exercice 5.

On considère la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ définie par

$$u_n = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \right).$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est monotone et qu'elle est convergente.

2. Majorer u_{2n} à l'aide de u_n .

3. Trouver la limite de $(u_n)_{n \geq 1}$.

Exercice 6.

Pour tout $A \subset \mathbb{R}$ non vide et tout $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$d(x, A) = \inf \{ |x - a| \mid a \in A \}.$$

(expression qui se lit : « distance de x à A »)

1. Donner une interprétation géométrique de $d(x, A)$ sur la droite réelle.

2. Examiner les cas où $A = [0, 1[$ et $x = 1, 2, 1/2$ ou -3 .

3. On revient au cas général. Justifier l'existence de $d(x, A)$.

4. La borne inférieure $d(x, A)$ est-elle un plus petit élément ? Illustrer par divers exemples.

5. Calculer $d(x, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Même question avec $d(x, \mathbb{Q})$.

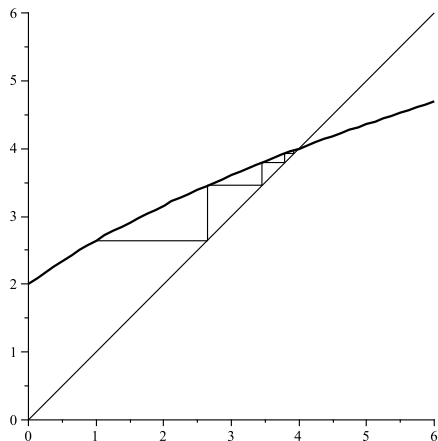
6. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leq |x - y|.$$

1. Solutions

Solution 1.

► Une figure pour commencer.



Comme, $|f'|$ semble majoré par un réel strictement inférieur à 1 sur l'intervalle \mathbb{R}_+ stable par f , on va essayer d'appliquer l'IAF.

► Définition de la suite : le terme u_1 est défini si et seulement si

$$u_0 \geq -\frac{4}{3},$$

et dans ce cas $u_1 \geq 0$. Notons $I = \mathbb{R}_+$ et f l'application de I dans \mathbb{R} définie par

$$x \mapsto \sqrt{4 + 3x}.$$

Solution 2.

1. D'après la formule du binôme de Newton,

$$u_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} [\sqrt{2}]^k (-1)^{n-k},$$

ainsi $u_n = a_n + b_n \sqrt{2}$ avec

$$a_n = \sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k} 2^k (-1)^n,$$

et

$$b_n = - \sum_{0 \leq 2k+1 \leq n} \binom{n}{2k+1} 2^k (-1)^n.$$

2. Toute suite stationnaire est banalement convergente. Réciproquement, supposons qu'une suite $(u_n)_{n \geq 0}$ d'entiers relatifs converge vers ℓ ; soit alors $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0$,

$$|u_n - \ell| \leq \frac{1}{4}.$$

Pour tout $n \geq n_0$,

La suite est bien définie dès que $u_0 \geq -\frac{4}{3}$ puisque l'on a $f(I) \subset I$.

► Convergence de la suite : un réel x est point fixe de f si et seulement si

$$x \geq 0 \text{ et } x^2 = 4 + 3x,$$

ie $x = 4$. La seule (et éventuelle!) limite de $(u_n)_{n \geq 0}$ est donc 4. La fonction f est dérivable sur I et sur cet intervalle,

$$f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{4+3x}} \leq \frac{3}{4}.$$

Appliquons l'inégalité des accroissements finis sur I

$$\forall x, y \in I, |f(x) - f(y)| \leq \frac{3}{4}|x - y|.$$

Donc, pour tout $n \geq 1$, puisque $u_{n+1} = f(u_n)$ et $f(4) = 4$,

$$|u_{n+1} - 4| \leq \frac{3}{4}|u_n - 4|,$$

et par une récurrence immédiate,

$$|u_n - 4| \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} |u_1 - 4|.$$

Ainsi, d'après le théorème d'encadrement,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 4.$$

$$|u_{n+1} - u_n| \leq |u_{n+1} - \ell| + |u_n - \ell| \leq 1/2$$

et puisque $u_{n+1} - u_n$ est un entier relatif,

$$u_{n+1} = u_n.$$

La suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est donc stationnaire.

3. Raisonnons par l'absurde en supposant l'existence de $p, q \in \mathbb{Z}$ tels que $\sqrt{2} = p/q$. On a alors, $\forall n \geq 0$,

$$qu_n = qa_n + pb_n \in \mathbb{Z}$$

et cette expression tend vers zéro car

$$0 < \sqrt{2} - 1 < 1,$$

donc d'après la question 2., l'expression qu_n est constante à partir d'un certain rang ce qui absurde car

$$0 < \sqrt{2} - 1 < 1.$$

Le nombre réel $\sqrt{2}$ est donc irrationnel.

Solution 3.

Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - 2/3$. Les hypothèses portant sur $(u_n)_{n \geq 0}$ imposent alors que $(v_n)_{n \geq 0}$ est bornée en valeur absolue par $M > 0$ et que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0.$$

Soit alors $\varepsilon > 0$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0$,

$$\left| v_n + \frac{1}{2}v_{2n} \right| \leq \varepsilon,$$

ainsi

$$\left| v_n - \frac{1}{2}v_{2n} \right| \leq \left| v_n + \frac{1}{2}v_{2n} \right| \leq \varepsilon,$$

et donc

$$\left| v_n \right| \leq \varepsilon + \frac{1}{2} \left| v_{2n} \right|.$$

Par une récurrence facile on prouve que $\forall p \geq 1$,

Solution 4.

Si $(u_n)_{n \geq 0}$ converge vers 0, $(v_n)_{n \geq 0}$ aussi d'après les théorèmes sur les opérations et les suites. Réciproquement, si $(v_n)_{n \geq 0}$ converge vers 0, puisque $\forall n \geq 0$,

Solution 5.

1. Pour $1 \leq k \leq n$, nous avons

$$1/\sqrt{n+1} \leq 1/\sqrt{k}.$$

En sommant membre à membre ces inégalités, on obtient $1/\sqrt{n+1} \leq u_n$. L'inégalité précédente, et le fait que

$$u_{n+1} = \frac{n}{n+1}u_n + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}},$$

entraînent que $u_{n+1} \leq u_n$. D'autre part, la suite est minorée par 0, donc convergente vers une limite $\ell \geq 0$, puisque décroissante.

Solution 6.

1. On a clairement dans le premier cas

$$d(1, A) = 0,$$

dans le deuxième

$$d(2, A) = 1,$$

et dans le troisième

$$d(1/2, A) = 0.$$

2. L'ensemble

$$\Omega = \{ |x - a| \mid a \in A \}$$

est une partie non vide (puisque A est non vide) de \mathbb{R} , Ω est de plus minorée par 0, Ω admet donc une borne inférieure.

$$\left| v_n \right| \leq \varepsilon + \frac{\varepsilon}{2} + \dots + \frac{\varepsilon}{2^{p-1}} + \frac{|v_{2^p n}|}{2^p},$$

et ainsi, puisque $\forall p \geq 1$,

$$\varepsilon + \frac{\varepsilon}{2} + \dots + \frac{\varepsilon}{2^{p-1}} \leq 2\varepsilon,$$

$\forall p \geq 1$,

$$\left| v_n \right| \leq 2\varepsilon + \frac{M}{2^p},$$

et par passage à la limite en p , $\forall n \geq n_0$,

$$\left| v_n \right| \leq 2\varepsilon.$$

La suite $(v_n)_{n \geq 0}$ converge vers 0 et ainsi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{2}{3}.$$

$$u_n = \frac{v_n}{1 - v_n},$$

$(u_n)_{n \geq 0}$ aussi, d'après les théorèmes sur les opérations et les suites.

2. Nous avons l'inégalité

$$u_{2n} \leq \frac{u_n}{2} + \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

3. La sous-suite de terme général u_{2n} est aussi convergente de même limite; en passant à la limite, dans l'inégalité de la question 2, on obtient $\ell \leq \ell/2$. On en déduit que $\ell = 0$.

3. La borne inférieure $d(x, A)$ n'est pas nécessairement un plus petit élément :

► si $A =]0, 1]$ et $x = 0$, on a $\Omega =]0, 1]$ et $d(x, A) = 0$ et $0 \notin A$, la borne inférieure n'est donc pas un plus petit élément.

► si $A = [0, 1]$ et $x = 0$, on a $\Omega = [0, 1]$ et $d(x, A) = 0$ et $0 \in A$, la borne inférieure est donc un plus petit élément.

4. Soit $\varepsilon > 0$, puisque \mathbb{Q} est dense dans \mathbb{R} ,

$$\mathbb{Q} \cap]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\neq \emptyset,$$

ainsi $\exists r \in \mathbb{Q}$ tel que

$$|x - r| < \varepsilon$$

et donc $d(x, \mathbb{Q}) \leq \varepsilon$. Par définition de la borne inférieure de Ω , $d(x, \mathbb{Q}) \leq \varepsilon$. Puisque $d(x, \mathbb{Q}) \geq 0$ et

$$\forall \varepsilon > 0, d(x, \mathbb{Q}) \leq \varepsilon$$

on peut conclure que $d(x, \mathbb{Q}) = 0$. $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ étant dense dans \mathbb{R} , on adapte sans peine ce qui précède pour montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, d(x, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = 0.$$

5. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. $\forall a \in \mathbb{R}$,

$$|x - a| \leq |x - y| + |y - a|,$$

or $\forall a \in A$,

$$d(x, A) \leq |x - a|,$$

ainsi $\forall a \in A$

$$d(x, A) - |x - y| \leq |y - a|.$$

Le nombre $d(x, A) - |x - y|$ est donc un minorant de l'ensemble

$$\left\{ |y - a|, a \in A \right\},$$

d'où

$$d(x, A) - |x - y| \leq d(y, A)$$

soit

$$d(x, A) - d(y, A) \leq |x - y|,$$

et puisque x et y jouent des rôles symétriques, on a aussi

$$d(y, A) - d(x, A) \leq |x - y|,$$

ainsi

$$\left| d(x, A) - d(y, A) \right| \leq |x - y|.$$