

Exercice 1.

The *arithmetic* (resp. *harmonic* resp. *geometric*) mean of two positive real numbers x and y are defined by

$$a(x, y) = \frac{x+y}{2}, \quad h(x, y) = a(x^{-1}, y^{-1})^{-1} = \frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}},$$

$$g(x, y) = \sqrt{xy}.$$

1. Show that $h(x, y) \leq g(x, y) \leq a(x, y)$.
2. Suppose that $0 < x < y$. Let $(u_n)_{n \geq 0}$ and $(v_n)_{n \geq 0}$ be the sequences defined recursively by $u_0 = x, v_0 = y$ and

$$u_{n+1} = h(u_n, v_n), \quad v_{n+1} = a(u_n, v_n).$$

Show that $\lim u_n = \lim v_n = g(x, y)$.

Exercice 2.

Etudier la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 4 \frac{u_n - 1}{u_n}.$$

Exercice 3.

Si $(u_n)_{n \geq 1}$ est une suite réelle à termes positifs, on lui associe la suite $(v_n)_{n \geq 1}$ définie par

$$v_n = \sqrt{u_1 + \sqrt{u_2 + \cdots + \sqrt{u_n}}}.$$

1. Montrer que la suite $(v_n)_{n \geq 1}$ est croissante.
2. Prouver que si la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est constante, alors $(v_n)_{n \geq 1}$ est convergente.
3. Que peut-on dire de $(v_n)_{n \geq 1}$ si $(u_n)_{n \geq 1}$ est majorée ?

Exercice 4.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle et soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Prouver les énoncés suivants.

Théorème de Césaro

$$\text{Si } \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = a, \text{ alors } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k = a.$$

En autres termes : si une suite converge, alors la suite de ses moyennes arithmétiques converge vers la même limite.

Corollaire 1

$$\text{Si } \lim_{n \rightarrow \infty} (u_{n+1} - u_n) = a, \text{ alors } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{n} = a.$$

Corollaire 2

$$\text{Si } u_n > 0 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \text{ et si } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = a, \text{ alors}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = a.$$

$$\text{Applications : Calculer } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!} \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\binom{2n}{n}}.$$

Exercice 5.

Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels. Les propriétés suivantes sont elles vraies ou fausses ?

1. Si $(|u_n|)_{n \geq 0}$ converge alors u aussi.
2. Si $u_{n+1} - u_n$ tend vers 0, alors la suite u est stationnaire.
3. Si u est croissante et vérifie

$$\forall n \geq 0, \quad u_n \leq n,$$

alors elle est convergente.

4. Si u n'est pas majorée alors elle diverge vers $+\infty$.

1. Solutions

Solution 1.

1. For all $x, y > 0$,

$$\begin{aligned} g(x, y) \leq a(x, y) &\iff \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} \\ &\iff 4xy \leq (x+y)^2 \\ &\iff 0 \leq x^2 - 2xy + y^2 \\ &\iff 0 \leq (x-y)^2 \quad (\text{true!}) \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} h(x, y) \leq g(x, y) &\iff \frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} \leq \sqrt{xy} \\ &\iff \frac{2xy}{y+x} \leq \sqrt{xy} \\ &\iff \frac{4x^2y^2}{(x+y)^2} \leq xy \\ &\iff 4xy \leq (x+y)^2 \\ &\iff 0 \leq (x-y)^2 \quad (\text{true!}) \end{aligned}$$

2. Since $u_0 < v_0$ and since the harmonic mean is smaller than the arithmetic mean we have

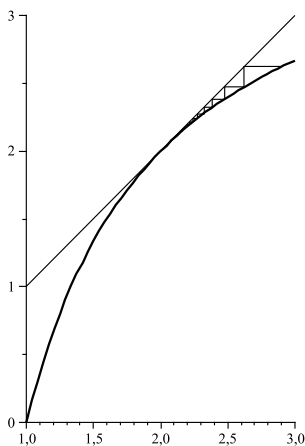
$$\forall n \geq 0 : u_n \leq v_n.$$

Moreover

$$\forall n \geq 0 : v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \leq \frac{v_n + v_n}{2} = v_n,$$

Solution 2.

► La suite est homographique, mais nous ne nous privons pas pour autant d'une figure...



► Point(s) fixe(s) de f : posons pour tout $x \neq 0$,

$$f(x) = 4 \frac{x-1}{x}.$$

Un réel x est point fixe de f si et seulement si

$$4 \frac{x-1}{x} = x$$

which means the sequence $(v_n)_{n \geq 0}$ is decreasing. On the other hand for all $n \geq 0$,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{2}{\frac{1}{u_n} + \frac{1}{v_n}} - u_n \\ &= \frac{2u_nv_n}{u_n + v_n} - \frac{u_n(u_n + v_n)}{u_n + v_n} \\ &= \frac{u_n(v_n - u_n)}{u_n + v_n} \geq 0, \end{aligned}$$

which means the sequence $(u_n)_{n \geq 0}$ is increasing; moreover v_0 is an upper bound of $(u_n)_{n \geq 0}$, and therefore the sequence is convergent to a real limit, say ℓ .

On the other hand $(v_n)_{n \geq 0}$ is decreasing and has u_0 as a lower bound, therefore it converges to say ℓ' . Taking the limit in

$$\forall n \geq 0 : v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$$

yields $\ell = \ell'$.

Since for all $n \geq 0$,

$$u_{n+1}v_{n+1} = \frac{2u_nv_n}{u_n + v_n} \frac{u_n + v_n}{2} = u_nv_n$$

the number u_nv_n is independent of n , and thus

$$\forall n \geq 0 : u_nv_n = u_0v_0 = xy.$$

Taking the limit yields $\ell^2 = xy$, thus $\ell = \pm\sqrt{xy}$. Obviously the sequences are positive, so $\ell = \sqrt{xy}$.

ie $x = 2$.

► Si $u_0 = 2$, la suite est constante.

► Conditions initiales interdites : si $u_0 \neq 2$, alors on sait (par injectivité de f) que le terme u_n ne prend jamais la valeur 2. Tant que le terme u_n est défini, l'expression

$$v_n = \frac{1}{u_n - 2}$$

l'est également. De plus, si le terme u_n est défini, alors $\forall k \leq n$,

$$\begin{aligned} v_{k+1} - v_k &= \frac{1}{4 \frac{u_n - 1}{u_n} - 2} - \frac{1}{u_n - 2} \\ &= \frac{u_n - 2}{2u_n - 4} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

ainsi $v_k = \frac{k}{2} + v_0$. Il existe k tel que $u_k = 0$ si et seulement si il existe k tel que

$$v_k = -\frac{1}{2},$$

ie si et seulement si

$$u_0 = \frac{2k}{k+1}.$$

La suite est donc définie si et seulement si

$$u_0 \notin \mathcal{I} = \left\{ \frac{2k}{k+1}, k \in \mathbb{N} \right\}.$$

► Convergence de la suite : pour $u_0 \notin \mathcal{I}$, on a

Solution 3.

1. Nous avons

$$\sqrt{u_n} \leq \sqrt{u_n + \sqrt{u_{n+1}}}.$$

En ajoutant u_{n-1} à chaque membre et en prenant la racine carrée, on en déduit que

$$\sqrt{u_{n-1} + \sqrt{u_n}} \leq \sqrt{u_{n-1} + \sqrt{u_n + \sqrt{u_{n+1}}}}.$$

En procédant ainsi, on obtient $v_n \leq v_{n+1}$; la suite $(v_n)_{n \geq 1}$ est donc croissante.

2. Si a est la valeur de la suite constante $(u_n)_{n \geq 1}$, notons $(a_n)_{n \geq 1}$ sa suite associée, c'est-à-dire celle qui vérifie,

Solution 4.

Preuve du théorème :

Posons $U_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k$ et supposons $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = a$. On distingue trois cas :

• $a \in \mathbb{R}$. Soit $\epsilon > 0$ un (petit) réel donné. On sait

$$\exists N \in \mathbb{N} \forall n > N, |u_n - a| < \epsilon.$$

Alors, avec ce N fixé,

$$\exists N' \in \mathbb{N} \forall n > N', \frac{1}{n} \sum_{k=1}^N |u_k - a| < \epsilon.$$

Ainsi pour tous $n > \max(N, N')$ on a

$$\begin{aligned} |U_n - a| &= \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (u_k - a) \right| \\ &\leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^N |u_k - a| + \frac{1}{n} \sum_{k=N+1}^n |u_k - a| \\ &< \epsilon + \frac{1}{n} \sum_{k=N+1}^n \epsilon = \epsilon + \frac{n-N}{n} \epsilon < 2\epsilon. \end{aligned}$$

Cela prouve que la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers a .

• $a = +\infty$. Soit $R > 0$ un (grand) réel donné. On sait

$$\exists N \in \mathbb{N} \forall n > N, u_n > 3R.$$

Alors, avec ce N fixé,

$$\exists N' \in \mathbb{N} \forall n > N', \frac{1}{n} \sum_{k=1}^N u_k > -R.$$

En plus, comme $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-N}{n} = 1$, on sait que

$$\exists N'' \in \mathbb{N} \forall n > N'', \frac{n-N}{n} > \frac{2}{3}.$$

$$\forall n \geq 0, u_n = 2 + \frac{1}{\frac{n}{2} + v_0},$$

ainsi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 2.$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_{n+1} = \sqrt{a + a_n}$. Montrons par récurrence sur n , que si $\ell = \sqrt{a + \ell}$, alors il majore $(a_n)_{n \geq 1}$. Nous avons $a_1 = \sqrt{a} \leq \ell$; supposons que $a_n \leq \ell$; en ajoutant a à chaque membre et en prenant la racine, on obtient

$$a_{n+1} = \sqrt{a + a_n} \leq \sqrt{a + \ell} = \ell.$$

La suite $(a_n)_{n \geq 1}$ est majorée et croissante, donc convergente.

3. Si a est un majorant de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$, nous avons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n \leq a_n$; comme $(a_n)_{n \geq 1}$ est majorée, $(v_n)_{n \geq 1}$ est donc convergente, car croissante et majorée.

Ainsi pour tous $n > \max(N, N', N'')$ on a

$$\begin{aligned} U_n &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^N u_k + \frac{1}{n} \sum_{k=N+1}^n u_k \\ &> -R + \frac{1}{n} \sum_{k=N+1}^n 3R \\ &= -R + \frac{n-N}{n} 3R > -R + \frac{2}{3} 3R = R. \end{aligned}$$

Cela prouve que la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $+\infty$.

• $a = -\infty$. Même raisonnement.

Preuve du corollaire 1 :

On suppose $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_{n+1} - u_n) = a$. Pour tout $n \geq 1$ posons $v_n = u_n - u_{n-1}$. Alors $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = a$ et

$$u_n = \frac{u_0}{n} + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n v_k.$$

Comme $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_0}{n} = 0$ on conclut grâce au théorème.

Preuve du corollaire 2 :

On comprend bien que ce corollaire est une version "multiplicative" du précédent corollaire "additif". C'est pourquoi nous allons utiliser les isomorphismes \ln et \exp comme "traducteurs".

On suppose donc que $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et que $\lim_{n \rightarrow \infty} u_{n+1}/u_n = a \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$. Posons $w_n = \ln u_n$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (w_{n+1} - w_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ln a,$$

où, pour traiter également les cas $a = 0$ ou $a = +\infty$, nous utilisons les conventions $\ln 0 = -\infty$ et $\ln(+\infty) = +\infty$. Grâce au corollaire 1 on obtient $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n/n = \ln a$. Ainsi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \exp(w_n/n) = \exp(\ln a) = a,$$

avec les conventions $\exp(-\infty) = 0$ et $\exp(+\infty) = +\infty$.

Applications du corollaire 2 :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) = +\infty.$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\binom{2n}{n}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\binom{2(n+1)}{n+1}}{\binom{2n}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+2)! n!^2}{(n+1)!^2 (2n)!} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} = 4. \end{aligned}$$

Solution 5.

1. C'est FAUX ! La suite $((-1)^{n+1})_{n \geq 0}$ est un contre-exemple élémentaire.
2. C'est FAUX ! Par exemple la suite de terme général $1/n$ vérifie l'hypothèse mais n'est pas stationnaire !

3. C'est FAUX ! La suite n'est pas nécessairement *majorée* : par exemple $(n)_{n \geq 0}$ diverge vers $+\infty$ tout en vérifiant la condition de l'énoncé.
4. C'est FAUX ! Contre-exemple : $((-1)^n n)_{n \geq 0}$.