

**Exercice 1.**

Es sei  $G$  eine Gruppe und es seien  $G_1, G_2$  Untergruppen von  $G$  derart, dass  $G_1 \cup G_2$  eine Untergruppe von  $G$  ist. Man zeige, dass dann  $G_1 \subset G_2$  oder  $G_2 \subset G_1$  gilt.

**Exercice 2.**

Show that the binary operation  $\odot$  on  $\mathbb{Z}$  defined by

$$\forall (n, m) \in \mathbb{Z}^2 : m \odot n = m + n + mn,$$

is commutative and associative. Is  $(\mathbb{Z}, \odot)$  a group?

**Exercice 3.**

Soit  $G$  un groupe et  $E$  l'ensemble des éléments d'ordre fini de  $G$ . Montrer que si  $E$  est fini, alors  $E$  est un groupe.

**Exercice 4.**

Soit  $G$  un groupe. Notre but est de montrer que  $G$  est isomorphe à un sous-groupe de  $S(G)$ .

1. Pour cela considérons pour tout  $g \in G$  l'application *translation à gauche par  $g$*

$$\varphi_g : G \rightarrow G, h \mapsto gh.$$

Montrer que  $\varphi_g \in S(G)$ .

2. Montrer que  $G \rightarrow S(G), g \mapsto \varphi_g$ , est un morphisme injectif. Conclure.

**Exercice 5.**

Soit  $G$  un groupe. On note  $\mathbf{Aut}(G)$  l'ensemble des automorphismes de  $G$ .

1. Montrer que  $\mathbf{Aut}(G)$  est un sous-groupe du groupe  $S(G)$  des bijections de  $G$  dans  $G$ .

2. Montrer que l'application

$$G \ni g \mapsto [\varphi_g : G \rightarrow G, x \mapsto gxg^{-1}],$$

définit un morphisme  $\varphi : G \rightarrow \mathbf{Aut}(G)$ .

3. En est-il de même avec l'application

$$G \ni g \mapsto [\psi_g : G \rightarrow G, x \mapsto g^{-1}xg] ?$$

4. Donner un exemple d'un groupe  $G$  où  $\varphi$  n'est ni surjective ni injective.

**Exercice 6.**

Soit  $\sigma \in \mathfrak{S}_{10}$  définie par

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 5 & 7 & 10 & 8 & 9 & 1 & 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Décomposer  $\sigma$  en produit de cycles disjoints, puis en produit de transpositions.
2. Calculer la signature de  $\sigma$ .
3. Quel est l'ordre de  $\sigma$  ?

**Exercice 7.**

Soit  $n \geq 2$ . Déterminer le centre  $Z$  de  $(\mathfrak{S}_n, \circ)$ , c'est-à-dire l'ensemble des permutations  $\sigma'$  telles que

$$\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n, \sigma \circ \sigma' = \sigma' \circ \sigma.$$

### 1. Solutions

**Solution 1.**

Wir nehmen an, dass das Gegenteil von

$$G_1 \subset G_2 \quad \text{oder} \quad G_2 \subset G_1$$

wahr ist, also dass

$$G_1 \not\subset G_2 \quad \text{und} \quad G_2 \not\subset G_1.$$

Also

$$\exists g_1 \in G_1 : g_1 \notin G_2 \quad \text{und} \quad \exists g_2 \in G_2 : g_2 \notin G_1.$$

**Solution 2.**

The binary operation commutative and associative since for all  $(n, m, k) \in \mathbb{Z}^3$

$$\begin{aligned} m \odot n &= m + n + mn = n + m + nm = n \odot m, \\ k \odot (m \odot n) &= k \odot (m + n + mn) \\ &= k + (m + n + mn) + k(m + n + mn) \\ &= k + m + n + mn + km + kn + kmn \\ &= (k + m + km) + n + (k + m + km)n \\ &= (k \odot m) \odot n. \end{aligned}$$

The element  $0 \in \mathbb{Z}$  is a neutral because

**Solution 3.**

Notons  $H$  le sous-groupe de  $G$  engendré par  $E$ . Nous allons montrer que  $E = H$ . Montrons d'abord que tout élément de  $H$  peut s'écrire comme produit d'éléments distincts de  $E$ . Remarquons que si  $x = ab$  avec  $a, b \in E$ ,  $x = ba'$  avec  $a' = b^{-1}ab \in E$  car  $a'$  est un conjugué de  $a$  donc de même ordre que  $a$ . Soit  $x \in H$ ,  $x$  s'écrit  $x_1 x_2 \dots x_n$  (l'écriture de  $x$  ne comporte pas d'inverses car l'inverse d'un élément d'ordre fini est aussi d'ordre fini) où  $n$  est le nombre minimal d'éléments de  $E$  avec lesquels on peut écrire  $a$ . Supposons que cette écriture comporte deux éléments identiques i.e. il existe  $i < j$  tels

**Solution 4.**

1. Pour tout  $g, h \in G$  on a

$$\begin{aligned} (\varphi_{g^{-1}} \circ \varphi_g)(h) &= g^{-1}(gh) = (g^{-1}g)h = h, \\ (\varphi_g \circ \varphi_{g^{-1}})(h) &= g(g^{-1}h) = (gg^{-1})h = h. \end{aligned}$$

Cela signifie que l'application  $\varphi_g$  est bijective,  $\varphi_{g^{-1}}$  étant son inverse.

Da  $g_1$  und  $g_2$  trivialerweise in der Untergruppe  $G_1 \cup G_2$  liegen, ist auch  $g_1 g_2 \in G_1 \cup G_2$ . Also

$$g_1 g_2 \in G_1 \quad \text{oder} \quad g_1 g_2 \in G_2.$$

Somit

$$\exists g \in G_1 : g_1 g_2 = g \quad \text{oder} \quad \exists h \in G_2 : g_1 g_2 = h.$$

Das führt aber zu einem Widerspruch,

$$g_2 = g_1^{-1} g \in G_1 \quad \text{oder} \quad g_1 = h g_2^{-1} \in G_2. \quad \zeta$$

$$\forall n \in \mathbb{Z} : 0 \odot n = 0 + n + 0 = n,$$

and there isn't another neutral element. In fact, suppose that  $e \in \mathbb{Z}$  is another neutral element, then  $0 \odot e = 0$  (because  $e$  is neutral) and also  $0 \odot e = e$  (because  $0$  is neutral), thus  $0 = e$ .

$(\mathbb{Z}, \odot)$  is not a group. If it was a group then  $1$  would be invertible, i.e., there would exist a  $k \in \mathbb{Z}$  such that  $1 \odot k = 0$ , which is a contradiction because

$$0 = 1 \odot k = 1 + 2k,$$

would imply that  $0$  is an odd number.  $\zeta$

que  $x_i = x_j = a$ . En répétant la méthode décrite précédemment,  $x = x_1 \dots x_i x_j x'_{i+1} \dots x'_{j-1} x_{j+1} \dots x_n$  où les  $x'_k$  appartiennent aussi à  $E$ . Mais  $x_i x_j = a^2$  qui est aussi d'ordre fini et  $x$  s'écrit avec  $n - 1$  éléments de  $E$ , ce qui contredit la minimalité de  $n$ . Notons  $r = |E|$ , l'écriture de longueur minimale de tout élément de  $H$  ne comporte qu'au plus  $r$  éléments tous distincts donc  $|H| \leq r!$ . En particulier,  $H$  est d'ordre fini donc tous ses éléments sont d'ordre fini. Ainsi  $H \subset E$ . Comme on a évidemment  $E \subset H$ , c'est que  $E = H$  et  $E$  est un sous-groupe de  $G$ .

2.  $\forall g, g', h \in G$  on a

$$(\varphi_{gg'})(h) = (gg')h = g(g'h) = (\varphi_g \circ \varphi_{g'})(h),$$

d'où  $\varphi_{gg'} = \varphi_g \circ \varphi_{g'}$ .

Soit  $g \in \text{Ker } \varphi$ . Alors  $\varphi_g = \text{Id}_G$ , c'est-à-dire  $gh = h$  pour tout  $h \in G$ . En particulier  $g = ge_G = e_G$ . Ainsi  $\text{Ker } \varphi = \{e_G\}$ , c'est-à-dire  $\varphi$  est un morphisme injectif.

**Solution 5.**

1. Par définition  $\mathbf{Aut}(G)$  est un sous-ensemble de  $S(G)$ . On sait que  $\mathbf{Aut}(G)$  est non-vide car il contient l'application identité. Si  $\alpha, \beta$  sont des automorphismes de  $G$  alors  $\alpha^{-1}$  est aussi un automorphisme de  $G$ , et la composée  $\alpha^{-1} \circ \beta$  aussi. Donc  $\mathbf{Aut}(G)$  est un sous-groupe de  $S(G)$ .

2. Fixons  $g \in G$ . Alors pour tous  $x, y \in G$  on a

$$\varphi_g(xy) = gxyg^{-1} = (gxg^{-1})(gyg^{-1}) = \varphi_g(x)\varphi_g(y),$$

donc  $\varphi_g$  est un morphisme. On voit immédiatement que  $\varphi_{g^{-1}}$  est son application réciproque, ce qui montre que  $\varphi_g \in \mathbf{Aut}(G)$ .

Pour tous  $g, h, x \in G$  on a

$$\varphi_{gh}(x) = (gh)x(gh)^{-1} = g(hxh^{-1})g^{-1} = (\varphi_g \circ \varphi_h)(x),$$

**Solution 6.**

1. On a

$$\begin{aligned} \sigma &= (1, 3, 7)(2, 5, 8, 4, 10)(6, 9) \\ &= (1, 3)(3, 7)(2, 5)(5, 8)(8, 4)(4, 10)(6, 9). \end{aligned}$$

**Solution 7.**

Il faut distinguer les cas  $n = 2$  et  $n \geq 3$ .

◊ Si  $n = 2$ ,  $\mathfrak{S}_2 = \{id_{\mathbb{N}_2}, (1, 2)\}$  donc  $Z = \mathfrak{S}_2$ .

◊ Soient  $n \geq 3$  et  $\sigma \in Z$ . Soit  $i \in \mathbb{N}_n$ . Il existe  $j$  et  $k$  dans  $\mathbb{N}_n$  tels que  $i, j, k$  soient deux à deux distincts. Comme  $\sigma \circ (i, j) = (i, j) \circ \sigma$ , on a

ce qui prouve que  $\varphi : G \rightarrow \mathbf{Aut}(G)$  est un morphisme de groupes.

**REMARQUE** — On appelle  $\varphi_g$  la conjugaison par  $g$ .

3. On a  $\psi_g = \varphi_{g^{-1}}$ ; ainsi  $\psi$  définit bien une application  $G \rightarrow \mathbf{Aut}(G)$ . Elle n'est pas un morphisme de groupes mais un *antimorphisme*, c'est-à-dire  $\psi_{gh} = \psi_h \circ \psi_g$  pour tous  $g, h \in G$ .

4. Si  $G = \mathbb{Z}$  alors pour tout  $g \in \mathbb{Z}$  on a  $\varphi_g = id_{\mathbb{Z}}$  (car  $\mathbb{Z}$  est abélien) et par conséquent  $\varphi$  n'est pas injective. En plus l'automorphisme  $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, n \mapsto -n$ , n'a pas d'antécédent par  $\varphi$  et par conséquent  $\varphi$  n'est pas surjective.

2. La décomposition de  $\sigma$  en produit de transpositions compte 7 termes, donc  $\varepsilon(\sigma) = -1$ .

3. On a  $o(\sigma) = \text{ppcm}(2, 3, 5) = 30$ .

$$(i, j) = \sigma \circ (i, j) \circ \sigma^{-1} = (\sigma(i), \sigma(j)).$$

Ainsi,  $\sigma(i) = i$  ou  $\sigma(i) = j$ . Comme le même raisonnement nous conduit à  $\sigma(i) = i$  ou  $\sigma(i) = k \neq j$ , on a  $\sigma(i) = i$ . Ainsi,  $\sigma = id_{\mathbb{N}_n}$  et  $Z = \{id_{\mathbb{N}_n}\}$ .